

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 621.01:534.01

Қолжазба құқығында

**ИБРАЕВ ГУЛАМА-ГАРИП АЛИШЕР ЕРИҚЖАНОВИЧ**

**Вертикаль роторлық жүйелер динамикасы**

6D060300 – Механика

Философия докторы (PhD)  
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:  
т.ғ.д, профессор  
Қыдырбекулы А.Б.

Шетелдік ғылыми кеңесші:  
DSc, профессор Elishakoff I.

Қазақстан Республикасы  
Алматы, 2021

## МАЗМҰНЫ

<b>НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР</b> .....	3
<b>КІРІСПЕ</b> .....	4
<b>1 ДОМАЛАУ МОЙЫНТІРЕКТЕРІНДЕГІ «РОТОР – СҰЙЫҚТЫҚ – ФУНДАМЕНТ» ЖҮЙЕСІНІҢ БЕЙСЫЗЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРІ</b> .....	13
1.1 Есептің қойылымы мен жүйенің қозғалыс теңдеулері .....	13
1.2 Жүйенің меншікті тербелістері.....	20
1.3 Жүйенің мәжбүрлі тербелістері.....	39
1.4 Өздігінен центрлену құбылысы.....	57
1.5 Қорытынды .....	58
<b>2 ДОМАЛАУ МОЙЫНТІРЕКТЕРІНДЕГІ «РОТОР – ФУНДАМЕНТ» ЖҮЙЕСІНІҢ БЕЙСЫЗЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРІ</b> .....	59
2.1 Есептің қойылымы мен жүйенің қозғалыс теңдеулері .....	59
2.2 Жүйенің меншікті тербелістері.....	62
2.3 Жүйенің мәжбүрлі тербелістері.....	64
2.4 Қорытынды .....	79
<b>3 ҰСАҚ ҚАТТЫ БӨЛШЕКТЕРДІҢ ВЕРТИКАЛЬ РОТОРЛЫҚ ЖҮЙЕДЕГІ СЕДИМЕНТАЦИЯ ҮДЕРІСІН ЗЕРТТЕУ</b> .....	80
3.1 Есептің қойылымы мен жүйенің қозғалыс теңдеулері .....	81
3.2 Қозғалыс теңдеулерінің шешімі .....	85
3.3 Нәтижелер .....	88
3.4 Қорытынды .....	102
<b>ҚОРЫТЫНДЫ</b> .....	103
<b>ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ</b> .....	105
<b>ҚОСЫМША А</b> .....	113
<b>ҚОСЫМША Б</b> .....	114
<b>ҚОСЫМША В</b> .....	116
<b>ҚОСЫМША Г</b> .....	118

## НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР

Диссертациялық жұмыста келесі стандарттарға сілтемелер қолданылды:

МЕМСТ 7.32-2001 (2006 ж. өзгерістер). Ғылыми зерттеу жұмысы туралы есеп. Рәсімдеу ережелері мен құрылымы;

МЕМСТ 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Құрастырудың жалпы талаптары мен ережелері;

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011: Қазақстан Республикасының жалпыға міндетті білім беру мемлекеттік стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура. Негізгі ережелер.

## КІРІСПЕ

**Жұмыс тақырыбының өзектілігі.** Қазіргі таңда технологиялық құрылғылар құрамында басқарылуы күрделі айналмалы элементтері бар, яғни роторлық жүйелер кіретін жылдамдығы үлкен, жоғары дәлдікті қажет ететін көптеген механизмдерден тұрады [1, 2]. Роторлық жүйелер динамикасын зерттеуге А. Stodola (1927 ж.), W.K. Wilson (1935, 1940, 1956 жж.), J. Kozesnik, A. Tondl (1965, 1971, 1973 жж.) [3], R.G. Loewy (1969 ж.), R.L. Eshleman (1972 ж.), N.F. Rieger (1977, 1986 жж.), A.D. Dimarogonas (1983 ж.), J.S. Rao (1983, 2011 жж.), J.M.Vance (1988, 2010 ж.), F.F. Ehrich (1992 ж.), D. Childs (1993 ж.), C.W. Lee (1993 ж.), E. Kramer (1993 ж.), А.М. Александров (1995 ж.), M. Lalanne және G. Ferraris (1998 ж.), G. Genta (1999, 2005 жж.), M.L. Adams Jr. (2001, 2010 жж.) [4], T. Yamamoto (2001 ж.) [5], R. Gasch, R. Nordmann және H. Pfützner (2003 ж.), E. Logan Jr. және R. Roy (2003 ж.), D.N. Walker (2004 ж.), R.B. McMillan (2004 ж.), W. Chen (2005 ж.), A. Muszynska (2005 ж.) [6], H. Li (2005 ж.), M.E. van Osc (2006 ж.), D. Norfield (2006 ж.), J. Kicinski (2006 ж.), А.Г. Костюк (2007 ж.), А.А. Иноземцев, М.А. Нихамкин және В.Л. Сандратский (2008 ж.), M.I. Friswell, J.E.T. Penny, S.D. Garvey and A.W. Lees (2010 ж.), H. Dresig және F. Holzweißig (2011 ж.), Y.Ishida, R.Tiwari (2018 ж.) сияқты ғалымдар көп үлес қосты. Олардың жұмыстары осы саланың дамуына әсер еткен физикалық және математикалық ұғымдардың негізін қалады. Әртүрлі факторларды ескеретін роторлар динамикасының ерекшеліктеріне қатысты түрлі сұрақтарға баса назар аударып отырып резонанстық, яғни критикалық жылдамдықты анықтаудың әртүрлі әдістері, мысалы, модальді талдау арқылы [7]; гироскоптық моменттерді ескере отырып критикалық жылдамдықтарды анықтау үшін Кэмпбелл жиілік диаграммаларын құру [8, 9]; қарапайым және кешенді формада дисбаланс әсері арқылы критикалық жылдамдықтарды табудан бастап тербеліс амплитудасы мен ротордың айналу орбитасын табуға дейінгі толық талдау жүргізу [10]; роторлар динамикасын ротордың жоғары жиіліктегі қозғалыс ерекшеліктерін ескере отырып зерттеу [11]; қатаң немесе серпімді роторлар қозғалысы орнықтылығын зерттеу және қамтамасыз ету [12]; суб- және ультрагармоникалық тербелістерге алып келетін бейсызық сипаттамалы негіздер қолданылған ротордың бейсызық тербелісіне талдау жасау [13, 14]; автотербеліс режимдері [15] және олардың жүйеде қолданылған мойынтіректерден тәуелділігі [16, 17] сияқты тақырыптарды атап өту керек.

Қазіргі таңда роторлық жүйелердің бейсызық динамикасын зерттеуге бағытталған көптеген жұмыстар бар [18-20]. Бұндай жүйелердің кең таралғандығына қарамастан жартылай толтырылған сұйықтың, сыртқы консервативті күштердің, сызықтық және бұрыштық теңгерілмегендік факторларының әсерін бірегей ұйытқу ретінде қарастыру қиындықтарына байланысты олардың динамикасы аз зерттелген [21-25].

Роторлық машиналардың конструкциясында жүйенің жұмысқа жарамдылығы мен беріктігін анықтайтын сызықсыз модельдермен

сипатталатын маңызды бөлшектердің ішіндегі ең маңыздысы серпімді негіздер болып табылады, ұсынылған жұмыста серпімді негіздер ретінде домалау мойынтіректері алынды. Мойынтіректердің сызықсыз қасиеттерін ескермеу роторлық жүйелерді сапалық және сандық талдау нәтижелерін нашарлатады [18, 3-б; 24, 4-б; 25, 4-б]. Бұл жағдайлар домалау мойынтіректері бар сызықты роторлық жүйелерді талдау кезінде мойынтіректердің қатаңдық және демпферлеу қасиеттерін жиі жуық түрде алумен түсіндіріледі, ал шын мәнінде мойынтірек қатаңдығы түсірілген жүктемеден, яғни роторлық жүйенің жұмыс режимінен, мойынтіректердегі ойықтардың геометриясы мен өлшемдерінен, мойынтіректің ішкі және сыртқы сақинасының орнықтыру шамасынан тәуелді болады [26, 27].

Бейсызықтық факторларды ескеретін мойынтіректердің математикалық модельдерін күрделілігі жағынан және бірінші кезекте олар ескеретін жүктемелерге байланысты ажыратады. Көп жағдайларда мойынтіректің математикалық моделін сипаттау үшін мойынтірекке әсер ететін радиалдық жүктемелер, домалау денесі мен мойынтірек сақинасының жанасқан нүктесіндегі деформацияны байланыстыратын Герц теориясы қолданылады [28-30]. Мойынтірек моделін қарастырғанда денелер мен домалау бетінің ешқандай сырғанауы орын алмайды деп ескеріледі. Демпферлеу әдетте эквивалентті тұтқыр және сызықты үйкеліс ретінде қарастырылады [28, 61-б]. Сондай-ақ процессті толық сипаттау үшін, инерциялық параметрлердің өзгерісі, дисбаланс және ротордың білікке симметриялы емес орнатылуы, сыртқы үйкеліс, әртүрлі позициялық күштер сияқты факторлар ескеріледі [31, 32]. Модельді осылай күрделендіру домалау мойынтірегіне орналастырылған кез келген роторлық жүйенің динамикасын талдау кезінде ойықтар өлшемінің, айналу жиілігінің жиіліктік спектрге және амплитуда-жиіліктік сипаттамаларға деген әсерін зерттеуге мүмкіндік береді.

Роторлық машиналардың көптеген түрлерінің ішінде қуысы жартылай сұйықпен толтырылған (білігі сұйықпен салқындатылатын турбомашиналар, сұйықтық гироскоптар, центрифугалар, сеператорлар және т.б.) роторлық жүйелер көп кездеседі [5, 252-б; 6, 209-б]. Қуысы жартылай сұйықпен толтырылған роторлар консервативті емес жүйелерге жатады [33]. Жүйенің консервативті емес болуының және жүйеде автотербелістердің пайда болу себебі ротор қуысын жартылай толтыратын сұйықтық болып табылады [34-36]. Сұйықтың реакция күшінің жүйе қозғалысына әсері көбіне ішкі үйкеліске ұқсас (циркуляциялық типті консервативті емес күш), яғни ол ротордың критикалық жылдамдығынан жоғары жиіліктерде біліктің айналу энергиясын оның тербеліс энергиясына айналдырады да, жүйенің орнықсыз күйге келуіне себепші болады [37-40]. Эксперименталды жұмыстарға негізделген әдеби шолу нәтижесі белгілі бір жағдайларда ротор қуысын толтыратын сұйықтық орнықсыз жүйе қозғалыс режимінің негізгі көзі болып табылатынын көрсетті [41-44]. Бұл құбылыстың физикалық себебі сұйық бөлшектерінің центден тепкіш үдеуі мен қарама-қарсы бағытта әсер ететін қысым градиенті арасындағы тепе-теңдік күйінің бұзылуы болып табылады [45-49].

Роторлық машиналарды жобалау және вибрациялық сипаттамаларын бағалау кезінде корпус тербелісінде ескеру қажет, яғни «ротор-сұйық-фундамент» динамикалық жүйесін толық қарастыру керек. Қуысы ішінара сұйықпен толтырылған роторлық жүйелер динамикасына бағытталған көптеген теориялық және тәжірибелік зерттеулерде тек қана сұйықпен толтырылған ротордың тербелісі қарастырылып, ал фундамент қозғалыссыз деп қарастырылады [50]. Мұндай жорамалдар роторлық жүйелердің динамикалық және кинематикалық сипаттамаларын бағалау кезінде үлкен қателіктерге алып келеді [51]. Роторлық жүйелер сияқты динамикалық жүйелер үшін, тәжірибелік зерттеулер фундамент вибрациясын ескеру және оны төмендету әдістерін әзірлеу қажет екендігін көрсетеді [52-54].

Қазіргі таңда өндіріс пен техникада кеңінен қолданылатын роторлық машиналардың көп бөлігінде домалау мойынтіректері қолданылады [55-57]. Сұйық немесе газ жақпасы негізіндегі сырғанау мойынтіректері домалау мойынтіректеріне қарағанда артықшылықтарға ие болғанына қарамастан, өндіріс пен техниканың кейбір салаларында кеңінен қолданыс таба алмады. Оның себебі айтарлықтай амплитудаларға әкелетін, мойынтірек түйіндерінің істен шығуына себеп болатын май қабатының әсері болып табылады [58]. Мойынтірек май қабаттарындағы кернеу гидродинамикалық қабаттағы қысымның орын алу нәтижесі болып табылады [59].

Ротордың айналу жиілігін арттыру машинаның «ротор-мойынтірек-корпус» жүйесі тарапынан қойылатын табиғи шектеулерге ие. Роторлық машиналардың салыстырмалы төмен айналу жиіліктерінде жұмыс жасау, әдетте, ротордың жеткілікті дәрежеде теңгерілуіне алып келеді. Идеал жағдайларда ротордың бас инерция осінің оның айналу осімен сәйкес келуі кезінде, ротор мен мойынтірек арасындағы динамикалық күштер және сәйкесінше вибрация жоғалады. Бұл кезде мойынтіректер сипаттамалары, олардың сызықсыз серпімділігі ескерілмейді [60]. Бірақ айналу жиілігі өскен сайын мойынтіректердің сызықсыз серпімділік қасиеттері айтарлықтай рөл ойнайды.

Сызықсыз серпімді негіздердегі роторлар динамикасы (әдетте, домалау мойынтіректері осындай болып табылады) аз зерттелген. Домалау мойынтіректерін – егер, бір қатарлы шар-мойынтірек қолданылса, онда шарнирлі абсолют қатты тірек моделі, немесе, егер әрбір тірекке қос жұп домалау мойынтірегі қолданылса, онда қысылған негіз моделі ретінде қарастыруға болады. Бірақ қазіргі таңда инженерлік есепті қарапайым түрге келтіретін мұндай тәсіл жеткілікті дәлдіктегі шешімді бермейді. Домалау мойынтірегінің математикалық моделі ретінде домалау мойынтіректері ерекшеліктерін, атап айтқанда, геометриялық қателігін; ойықтардың әсерін [61-64], сондай-ақ, қолдану барысындағы өзгерісін, сызықсыз қатаңдық қасиеттерін [65, 66], домалау денелеріне деген центрден тепкіш күштердің әсерін, мойынтірек сақиналарының өзара ығысуы мен қиғаштануын; гироскоптық құбылыстарды [67], майлау қабатындағы үйкеліс күштерінің әсері және сақиналар мен домалау денесінің жанасқан нүктесіндегі май

кабатының қалыңдығын анықтайтын факторларды мейлінше толық сипаттайтын модельдерді таңдау маңызды [68].

Берілген жұмыста қуысы жартылай сұйықпен толтырылған серпімді фундаментке тік орналастырылған домалау мойынтіректерінде айналмалы қозғалыс жасайтын роторлық жүйелер зерттеледі. Айналу дәлдігі мен ротордың айналу жылдамдығын арттыруға бағытталған талаптарға байланысты домалау мойынтіректерінің серпімді қасиеттерін ескеру қажеттігі туындайды. Мұндағы ротор динамикасына айтарлықтай әсер ететін фактор домалау мойынтірегінің, домалау денесінің домалау жолдарымен жанасу нүктесіндегі деформациясы есебінен туындайтын радиалдық иілгіштік кезіндегі сызықсыз қатандық қасиеттері болып табылады [69].

Бұл есептің шешімі айналмалы ротордың қозғалысы мен оның қуысындағы сұйықтың қозғалысы өзара байланысты болуы, ал ол өз кезегінде мәжбүр тербелістердің айнымалы болуына және роторлық жүйенің орнықсыздығына себеп болуына байланысты күрделене түседі. Шешілетін теңдеулер жүйесі өзара байланысқан қатты дененің қозғалыс теңдеуі, тұтас орта теңдеуі мен сұйық үшін шекаралық шарттардан тұрады.

Вертикаль роторлық жүйелерде орын алатын центрифугирлеу үдерісі бүгінгі күнде ғылыми-зерттеу, медицина салаларында, жеңіл және ауыр өнеркәсіпте кең қолданыс тапты. Жалпы центрифугирлеу кезінде жүретін сепарация мен седиментация процесстеріне әсер ететін параметрлерді анықтау жұмыстары 19 ғасырдың басынан жүріп келеді. Бұл бағыттағы жұмыстардың қатарына 1806 жылы Найтпен сепарация үдерісі мен стакандардың құлама түзуден көлбеулік бұрышы арасындағы тәуелділігіне арналған жұмысын атап өтсе болады [70]. 1878 жылы қаймақты сүттен бөлу мақсатында шведтік өнертапқыш Де Лавальмен жасалған, 3000 айн/мин жылдамдығымен жұмыс жасайтын алғашқы үздіксіз үдерісті центрифуга бұл құрылғылардың өнеркәсіпте қолдануға кең мүмкіндіктер ашты. 1923 жылы Шведбергпен 10000 айн/мин жылдамдықпен жұмыс істейтін ультрацентрифуганы ойлап табу центрифуга технологиясының тағы бір жаңа кезеңін ашты. 1940 жылдары алғашқы жасушалық компоненттерді центрифугалық әдістермен бөлу жасушаішілік компоненттердің құрылымы, құрамы және қызметі туралы білімімізді өзгертіп қана қоймай, биомедициналық зерттеулер үшін центрифугалық әдістердің потенциалын көрсетті. Екінші дүниежүзілік соғыс кезінде центрифугирлеу саласы қарқынды дамып уран изотоптарын байыту мен бөлуде кең қолданыс таба бастады [71]. Бүгінгі таңда центрифугалар кең ауқымды коммерциялық қосымшалардан бастап зертханалық зерттеулерге дейін әр түрлі салаларда қолданылады. Минералды, мұнай-химия, химия, медицина, фармацевтика, өнеркәсіп, сүт, тамақ, полимер, энергетика және ауылшаруашылық салаларында қолданылатын центрифугалардың конструкциялары мен конфигурацияларының саны көп [72-74].

Центрифугалық техникада пайда болған жаңа тенденциялар центрифугалардың әртүрлі конструкцияларының пайда болуына әкелді, олардың кейбіреулерін белгілі жолдар арқылы сандық және сапалық

тұрғыдан бағалау қиын болып табылады [75, 76]. Бұл тақырыпқа арналған көптеген ғылыми жұмыстар, патенттер мен авторлық куәліктер алынған, қатты бөлшектерді сұйықтықтардан центрифугалау арқылы механикалық бөлу әдістері және оны жүзеге асыру үшін көптеген құрылғылар ұсынылған [77-85].

Бұл жұмыста бөлшектің кеңістіктік қозғалысы және оның вертикаль центрифугада тұну уақыты зерттеледі, қатты бөлшектерді сұйықтықтан бөлу процесін толық бағалау үшін ротордың, түтіктердің бұрыштық айналу жылдамдығының шамасы және олардың көлбеу бұрышы уақытқа байланысты өзгермелі шамалар екендігі ескеріледі, бұл сонымен қатар бөлшектердің және механикалық жүйенің дифференциалдық теңдеулерінің жалпы шешімін табуды күрделендіреді. Бірнеше осыған дейін жарық көрген еңбектер мен жарияланымдар негізінде суспензияны өңдеу үшін пайдаланылатын роторлық қондырғыға арналған сепарация мен седиментация үдерістерін сипаттау үшін қолданылатын аналитикалық зерттеу және бағалау жұмыстарының әдістемесі жасалды [86-87].

**Жұмыстың мақсаты:** «ротор-сұйықтық-фундамент» жүйесінің өзара байланысқан тербелістерін ескеретін бейсызықты роторлық жүйелердің жалпыланған динамикалық модельдерін жасау, сондай-ақ вертикаль роторлық жүйелердегі қатты бөлшектерді бөлу үдерісін зерттеу болып табылады. Жұмыста келесі есептер шешіледі:

– «ротор-сұйықтық-фундамент» жүйесінің жалпыланған динамикалық моделін құру және зерттеу, бұл вертикаль сұйықтығы бар роторлардың динамикасын фундамент қозғалысын және бейсызықтықты ескерген кездегі өзара байланысты тербелістерін зерттеуге мүмкіндік береді;

– қуысы сұйықтықпен жартылай толтырылған вертикаль роторлық жүйелердің меншікті бейсызық тербелістерінің амплитудасын және критикалық жиіліктерін есептеудің аналитикалық әдістемесін әзірлеу;

– қуысы сұйықтықпен жартылай толтырылған вертикаль роторлық жүйелердің мәжбүрлі бейсызық тербелістерінің амплитудасын және резонанстық жиіліктерін есептеудің аналитикалық әдістемесін әзірлеу;

– вертикаль роторлық жүйелердегі қатты бөлшектерді сепарациялау үдерісінің негізгі сипаттамаларын есептеу әдістемесін жасау.

**Зерттеу нысаны.** Мұнай өңдеу және жеңіл өнеркәсіп саласында кеңінен қолданыс тапқан сепаратор-центрифугалардың динамикасын сипаттау және параметрлік анализ жүргізу үшін қажет жалпылама вертикаль роторлық жүйенің динамикалық моделі.

**Зерттеу пәні.** Қуысы жартылай сұйықпен толтырылған, сипаттамасы бейсызық болып табылатын домалау мойынтіректерінде айналатын, серпімді фундаментке орнатылған роторлық жүйенің бейсызық тербелістері.

**Зерттеу әдістері:**

– теориялық механиканың және тұтас орта механикасының негізгі іргелі заңдары;

– сызықты және бейсызық тербелістер теориясының апробацияланған белгілі аналитикалық әдістері;



- математикалық талдау, математикалық физиканың теңдеулері, тұтас орта, шекаралық қабат теориясы, жоғары алгебра теориясының әдістері;
- бейсызық дифференциал теңдеулерді шешуге арналған дәлдігі жоғары классикалық сандық әдістер.

**Ғылыми жаңалығы.** Берілген жұмыста қуысы жартылай сұйықпен толтырылған, сипаттамасы бейсызық болып табылатын домалау мойынтіректерінде айналатын, серпімді фундаментке орнатылған роторлық жүйелердің кешенді шешімі көрсетіледі. Дуффинг теңдеуімен сипатталатын бейсызық роторлық жүйелердің Якоби эллиптикалық функциялары арқылы шешімі анықталып, меншікті, мәжбүрлі тербелістері зерттеледі. Қуысы сұйықпен толтырылған бейсызық «Ротор – сұйықтық – фундамент» жүйелерінің меншікті, мәжбүрлі және автотербелістер орын алатын жиіліктері анықталады. Вертикаль сұйықтығы бар роторлардың, фундамент қозғалысын және бейсызықтықты ескерген кездегі, өзара байланысты тербелістерін зерттеуге мүмкіндік беретін «Ротор-сұйықтық-фундамент» жүйесінің жалпыланған динамикалық моделі жасалды. Алғашқы рет қуысы сұйықтықпен жартылай толтырылған вертикаль роторлық жүйелердің меншікті және мәжбүрлі бейсызық тербелістерінің амплитудасын, критикалық және резонанстық жиіліктерін есептеудің аналитикалық әдістемесі дайындалды. Алғашқы рет вертикаль роторлық жүйелердегі қатты бөлшектерді сепарациялау үдерісінің (оптималды бұрыштық жылдамдық және көлбеулік бұрышы, сепарация уақыты деген сияқты) негізгі сипаттамаларын есептеу әдістемесі жасалды.

#### **Қорғауға шығарылатын ғылыми тұжырымдамалар:**

- вертикаль роторлардың сұйықтықпен өзара байланысты қозғалыстарының динамикасын зерттеуге мүмкіндік беретін «ротор-сұйықтық-фундамент» жүйесінің жалпыланған динамикалық және математикалық моделі;

- қуысы сұйықтықпен жартылай толтырылған вертикаль роторлық жүйелердің меншікті және мәжбүрлі тербелістерінің критикалық және резонанстық жиіліктерін және амплитудаларын есептеудің бейсызықтық орын алған кезде аналитикалық әдістемесі;

- вертикаль роторлық жүйелердегі қатты бөлшектерді сепарациялау үдерісінің негізгі сипаттамаларын есептеу әдістемесі.

**Ғылыми тұжырымдамалардың, диссертациялық жұмыс қорытындылары мен нәтижелерінің дұрыстығы мен негізділігі.** «Қатты дене-сұйықтық» жүйесінің динамикалық моделін құру кезінде екінші текті Лагранж теңдеулері және Эйлердің гидродинамикалық теңдеуі қолданылады. Жылжымалы мойынтіректердің бейсызық сипаттамасы Герц теориясына сәйкес модельденеді.

Қатты дене қозғалысының сызықты емес дифференциалдық теңдеулерінің шешімдерін анықтау үшін комплексті амплитуда әдісі, гармоникалық баланс, гармоникалық сызықтандыру (Дуффинг типті теңдеулер үшін) және т.б. әдістері пайдаланылады.

Мәжбүрлі және меншікті тербелістердің, ротордың және фундаменттің субгармоникалық және ультрагармоникалық тербелістерінің амплитудасын анықтау үшін сызықтық емес тербелістер теориясындағы мәселелерді шешу әдістері, жоғары алгебра теориясы (екінші деңгейден жоғары полином шешімі) қолданылады.

**Зерттеудің теоретикалық және практикалық өзектілігі.** Бүгінгі күнде бейсызық жүйелерді зерттеу алдыңғы қатарлы, көп жағдайда дәл шешімі жоқ механиканың күрделі мәселелерінің бірі болып табылады. Жоғары жиіліктерде өтетін роторлық жүйелердің қозғалысы мен тербелістерін зерттеу, зерттеме жолдары мен әдіснамасын көрсету, теориялық және аналитикалық механиканың, дифференциалдық теңдеулердің және т.б. көптеген басқа салаларға пайдасын тигізері сөзсіз. Жұмыс нәтижелері қуысы сұйықтықпен жартылай толтырылған роторлық жүйелердің бейсызық динамикасындағы зерттеулерді жетілдірудің ғылыми негізі болып табылады және жоба алдындағы есептеулерді ең аз шығындармен жүргізуге, сапалық және сандық сипаттамалар жасауға және жаңа вертикаль роторлық машиналардың жобалау уақытын қысқартуға, олардың жұмысының сапасы мен қауіпсіздігін арттыруға мүмкіндік береді.

Ұсынылған жұмыстың практикалық маңызы машина жасау және машинатану салаларының күрделі облысын құрайтын роторлық құрылғылар саласында бейсызықтықтың өндіріс үдерісіне әсерін зерттеуге бағытталып, сонымен қатар мұнайды өзге компоненттерінен тазалау, ауыр мұнайдан құнды және бағалы элементтерді (мысалы ванадий), жеңіл көмірсудан парафин бөлу сияқты көптеген мәселелерді шешуге болатын вертикаль үздіксіз үдерісті центрифугалардың динамикасын сипаттау арқылы мұнайдың құбырлармен ағуын арттырады (тазартылған мұнай), мұнай өңдейтін зауыт жабдықтары мен құбырлардың жарамдылық мерзімін ұзартады (нашар тазартылған мұнай себепті орын алатын коррозиядан қорғау), аймақтардың экологиялық жағдайын жақсартып (қолданыстан шыққан мұнай қамбаларын жою), әлеуметтік мәселелер шешуде ат салысу (жаңа жұмыс орындары ашылады) арқылы экономика тұрғысынан пайда алып келуді көздейді [88].

**Жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы.** Ұсынылған жұмыс энергетика және машина жасау ғылымдары саласындағы қолданбалы зерттеулерді гранттық қаржыландыру бағдарламасының «Жоғары жиілікті электромагниттік өріс әсері мен тіректердің бейсызықтығын ескергендегі көпфазалы сұйық орталарды бөлуге арналған роторлық машиналардың динамикасын зерттеу және жобалау» (2020-2022 жж., АР08856167) шеңберінде жасалды.

**Жұмыс апробациясы.** Жұмыстың негізгі нәтижелері:

- әл-Фараби атындағы ҚазҰУ «Механика» кафедрасының профессоры А.Б.Қыдырбекұлының басшылығымен өткен
- 2019 ж. - Mathematics Research Centre at Keele University (United Kingdom) профессор J.Kaplunov басшылығымен өткен

– 2020 ж. - Ocean and Mechanical Engineering Department in the Florida Atlantic University (Boca Raton, USA) профессор I.Elishakoff басшылығымен өткен ғылыми семинарларында және

– International Conference on «Modern Achievements of Science and Education» «Modern Achievements of Science and Education» (Paris, France, 2013);

– 1st International Conference on Mathematical Methods & Computational Techniques in Science & Engineering (Athens, Greece, 2014);

– XII International conference on the Theory of Machines and Mechanisms (Liberec, Czech Republic, 2016);

– «Приоритетные задачи и стратегия технических наук» (Тольятти, Россия, 2017);

– «Актуальные проблемы информатики, механики и робототехники. Цифровые технологии в машиностроении» (Алматы, Казахстан, 2018);

– XIII International conference on the Theory of Machines and Mechanisms (Liberec, Czech Republic, 2021) ғылыми-практикалық конференцияларында және Ө. А. Жолдасбековтың 90-жылдығына арналған екінші халықаралық «Механика будущего» атты симпозиумында (Алматы, Казахстан, 2021) баяндалды.

**Жарияланымдар.** Диссертацияның негізгі ғылыми нәтижелері 12 жарияланымда жарық көрді [30, 69, 86-87, 89-96], яғни ҚР БҒМ БҒСБК ұсынған журналдарда 3 мақала [90-92], Scopus деректер базасымен рецензияланатын ғылыми журналдарда 4 мақала [30, 69, 86, 87], оның ішінде нөлдік емес импакт-фактормен 2 мақала [30, 69], халықаралық конференциялар еңбек жинақтарында 6 жарияланым [86, 87, 93-96], және 1 патент [89, Қосымша А].

**Автордың қосқан жеке үлесі.** Диссертациялық жұмыста жасалған зерттеулердің негізгі нәтижелерін автор өзі алды. [30] жұмыста автормен аналитикалық шешімдерге негізделген амплитуда-жиіліктік сипаттамаларды тұрғызу және әдебиеттерге шолу жұмыстары, ал бірлескен авторлармен есептің қойылымы қою, нәтижелерді талдау жұмыстары жүргізілді. [69, 90-95] еңбектерінде автормен әдебиеттерге шолу, аналитикалық шешімді алу және сәйкесінше меншікті және мәжбүрлі тербелістердің амплитуда-жиіліктік сипаттамаларын тұрғызу, нәтижелерді талдау жұмыстары жасалды, бірлескен авторлармен есептің қойылымын қою, нәтижелерді талдау жұмыстары жасалды. [86, 87, 96] жұмыстарында автормен центрифугалау барысында орын алатын сепарация мен седиментация үдерістерін сипаттауға мүмкіншілік беретін қисықтары тұрғызылып, бірлескен авторлармен нәтижелерді талдау жұмыстары іске асырылды. [89] жұмысында автормен патентті алу үшін қажетті тіркеу, редакциялау жұмыстары, ал бірлескен авторлармен патент формуласы және схема-сызбасын дайындау жұмыстары жүргізілді.

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** Диссертациялық жұмыс кіріспе, 3 бөлім, қорытынды, 105 қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың көлемі 121 беттен, оның ішінде 3 кесте және 51 суреттен тұрады.

### **Диссертациялық жұмыстың негізгі мазмұны.**

Кіріспеде диссертациялық зерттеу тақырыбының өзектілігі, жұмыстың негізгі мақсаты, зерттеу объектісі, пәні мен әдістері, диссертациялық жұмыстың ғылыми жаңалығы, ғылыми-практикалық маңызы сияқты сұрақтар қамтылған.

Бірінші бөлімде зерттелетін мәселенің қазіргі жағдайы сипатталып, қуысы сұйықтықпен жартылай толтырылған қатты дененің бейсызық тербелістері саласындағы жұмыстар мен әдебиеттерге шолу жасалды. Сонымен қатар серпімді тіректердің бейсызықтығын ескергендегі қозғалмалы фундаментте орналастырылған қуысы сұйықтықпен жартылай толтырылған ротордың динамикалық моделі құрылып, «ротор-сұйықтық-фундамент» жүйесінің бейсызық меншікті және мәжбүрлі тербелістеріне талдау жүргізілді.

Екінші бөлімде серпімді тіректердің бейсызықтығын ескергендегі қозғалмалы фундаментте орналастырылған қуысы бос ротордың динамикалық моделі құрылып, «ротор-фундамент» жүйесінің бейсызық меншікті және мәжбүрлі тербелістерінің амплитудасы мен жиіліктерін жоғары дәлдікпен анықтауға мүмкіндік беретін Якоби эллиптикалық функциялар әдісіне негізделген әдістемелер ұсынылып, сәйкесінше белгілі классикалық әдістермен салыстырмалы талдау жасалды.

Үшінші бөлімде қарастырылып жатырған роторлық жүйенің өндірісте қолданбалы мысалдарының бірі болып табылатын шикі мұнайды тазартуға арналған сепаратор-центрифуганың ішінде жоғарыда келтірілген тербелістер салдарынан концентрациясы төмен көпфазалы орталарда қатты бөлшектердің сепарациясы мен седиментация үдерістеріне талдау жасалып, маңызды нәтижелер алынды.

Қорытындыда диссертациялық жұмыста алынған негізгі нәтижелер мен қорытындылар келтірілді.

**Алғыс.** Автор отандық ғылыми кеңесші, т.ғ.д., профессор Қыдырбекұлы Алматбек Балғабекұлына диссертациялық жұмыстың барлық кезеңдерінде ғылыми басшылық үшін, баға жетпес көмек пен құнды кеңестер бергені үшін және шетелдік ғылыми кеңесші, DSc, профессор Елишакофф Исаак Бенционовичке ғылыми тағылымдама кезінде (Florida Atlantic University, АҚШ) қолдау көрсеткені үшін зор алғысын білдіреді.

## **1 ДОМАЛАУ МОЙЫНТІРЕКТЕРІНДЕГІ «РОТОР – СҰЙЫҚТЫҚ – ФУНДАМЕНТ» ЖҮЙЕСІНІҢ БЕЙСЫЗЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРІ**

Әлемнің жетекші елдерінің зерттеушілерінің қатты дененің бейсызықты тербелістерінің әртүрлі аспектілеріне, жырттылай сұйықтықпен толтырылған вертикаль роторлық жүйелердің бейсызықты динамикасына ғылыми және практикалық қызығушылығы қазіргі заманғы технологияда кеңінен қолданылатын жылдам айналатын денелердің тербелістерін зерттеу қажеттілігінен (әртүрлі гироскопиялық құрылғылар, турбогенераторлар, газ және бу турбиналары, электр қозғалтқыштары, сепараторлар, ротациялық компрессорлар, центрифугалар және ультрацентрифугалар, ядролық «зырылдауықтар» және т.б.), сондай-ақ авиациялық техниканың қарқынды дамуынан, сұйық отынды зымырандар мен айналумен тұрақтандырылған спутниктердің қозғалыстарын зерттеумен байланысты.

Жартылай сұйық толтырылған тік роторлы жүйелердің сызықтық емес динамикасы теориясының дамуы Стокс, Гельмгольц, Любек, Ламб және Жуковскийдің еңбектерінен басталып, одан әрі Г.С. Нариманов, С. Л. Соболев, Н. Г. Четаев, Л.Н.Сретенский, А. Ю. Ишлинский, В. В. Румянцев, М. Е. Темченко, С. В. Малашенко, Б.И. Рабинович, Г.И. Микишев, В.Н. Рубановский, В.Н. Самсонов, И.М. Рапопорт, Н.Н. Моисеев, Ф.Л. Черноусько, Н.В.Дерендяев, V.L. Newkirk, J.F. Lewis, O. Pinkus, Эрих, Saito, Hendricks, Kuipers, Иноуэ, Stewartson, Berman, Kollman, Yamamoto, Lichtenberg, Ishida, Е.Р. Рахимов, А.Б. Кыдырбекулы, А.Ш. Рахматуллаев және т.б. еңбектерінде жалғасын тапты.

Жоғарыда келтірілген жұмыстардың көпшілігі кең практикалық қолдануға байланысты идеал сығылмайтын сұйықтықпен толтырылған қатты дененің орнықты тепе-теңдік төңірегіндегі кіші тербелістер теориясының әртүрлі жағдайларына арналған. Онымен салыстырғанда бейсызық тербелістер және тұтқыр сұйықтықпен толтырылған қатты дененің кіші тербелістерінің теориясы әліде зерттеуді қажет етеді.

### **1.1 Есептің қойылымы мен жүйенің қозғалыс тендеулері**

Статикалық теңгерімсіздікке ие радиусы  $R$  симметриялы тік ротор айналмалы мойынтіректерде тұрақты  $\Omega_0$  бұрыштық жылдамдықпен айналады, ротордың бұрыштық жылдамдығы үлкен болуы салдарынан гравитациялық күш центрден тепкіш күшпен салыстырғанда мардымсыз болып саналады, ал сұйықтық сыртқы радиусы  $R$  және еркін бетінің радиусы  $r_0$  болатын цилиндрлік сұйық қабат түрінде болсын. Сұйықтықтың массасы (уақыттан тәуелсіз) тұрақты, ал оның мөлшері ротордың үлкен ауытқулары орын алған жағдайда да қуыстың цилиндрлік қабырғаларын толығымен сулау (ылғалдандыру) үшін жеткілікті. Массасы  $M$ , эквивалентті қатаңдық коэффициенті  $c_2$  болатын серпімді тіректерде орнатылған, демпферленген фундамент жүйенің қозғалысы кезінде горизонталь жазықтықта қозғалыс жасайды. Сұйықтықтың қозғалысы айналып жатырған ротормен байланысқан полярлық координата жүйесінде сипатталады. Берілген есеп

айналмалы ротордың қозғалысы мен оның қуысындағы сұйықтықтың қозғалысы бір-бірімен байланысты болуы себепті күрделі болып табылады, бұл болса өз кезегінде мәжбүр тербелістер жиілігінің айнымалы болуына, ал шешілетін теңдеулер жүйесі өзара байланысқан қатты дененің қозғалыс теңдеулері, тұтас ортаның теңдеулерінен және сұйықтықтың шекаралық шарттарынан тұрады. Білік осінің қозғалмайтын координаталар жүйесінің осьтеріне қатысты деформациясы, тербелістердің барлық амплитудаларының уақыт бойынша туындысы аз болып табылады. Ротор жазық параллель қозғалыс жасайды, және координаталық осьтер төңірегінде айналу орын алмайды. Мойынтіректердің радиалды иілгіштігі контакт орын алатын жерлерде домалау денелерінің және домалау жолдарының деформациялануы себепті орын алады. Мойынтіректің бейсызық қалпына келтіруші күші Герц контакт теориясына сәйкес (1) түрінде сипатталады.

$$F_C = C_b \delta_r^{\frac{3}{2}}. \quad (1)$$

мұндағы  $F_C$  радиал қалпына келтіруші күш (Н),  $\delta_r$  – домалау мойынтірегіннің радиал бағыттағы деформациясы (м),  $C_b$  қатандық коэффициенті (Н/м<sup>3/2</sup>). Жүйенің қозғалыс теңдеулерін шешу және сапалық анализ жасау мақсатында (1) түріндегі мойынтіректің қалпына келтіруші күшін [28, 61-б; 97, 3-б] сәйкес (2) түріндегі дәрежелік қатармен аппроксимациялауға болады:

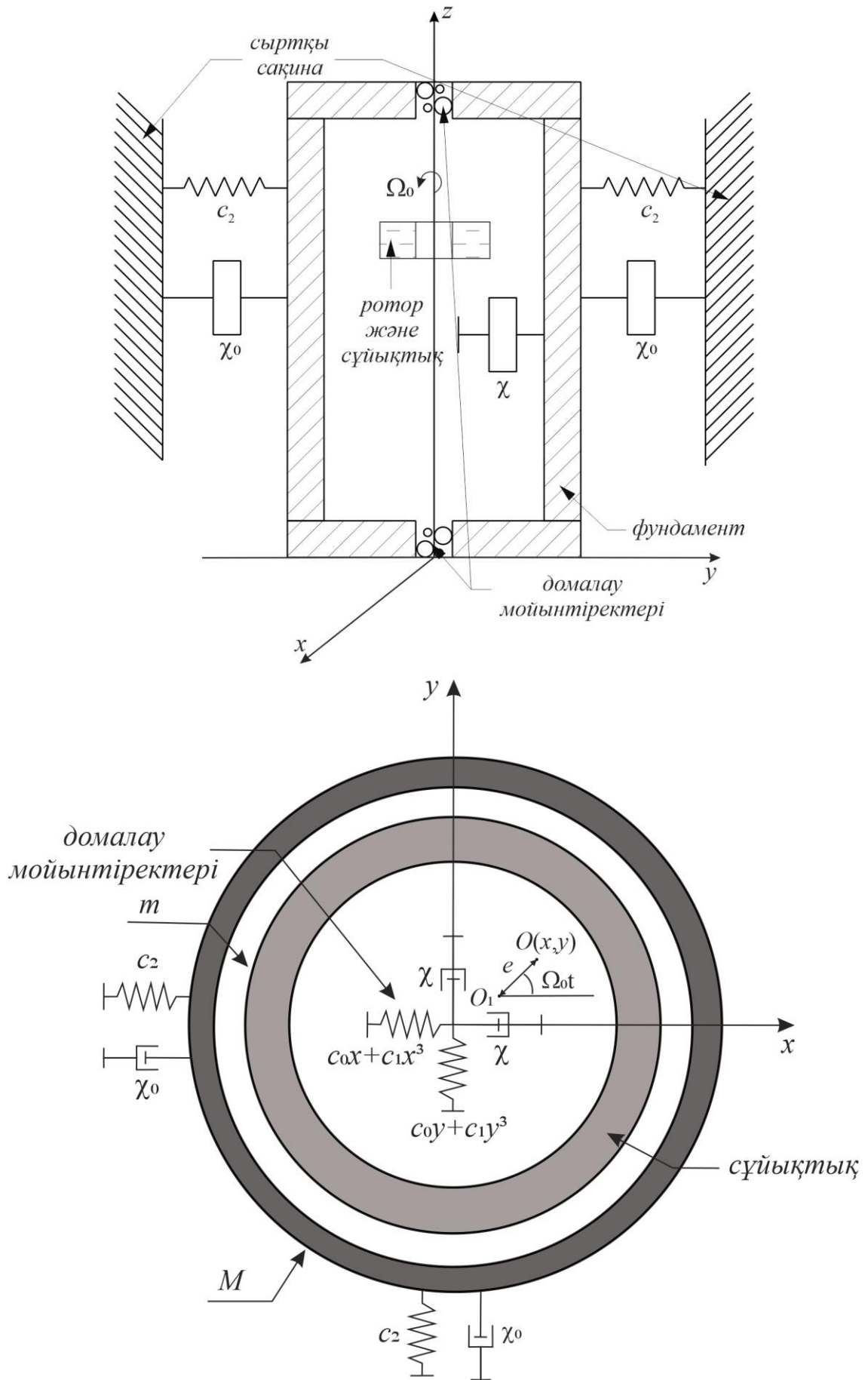
$$F_C = c_0 \delta_r + c_1 \delta_r^3, \quad (2)$$

мұндағы  $c_0$  мен  $c_1$  қатандық коэффициенттері. Бұл жіктеу, эксперименттер көрсеткендей [97, 3-10 б],  $\delta_r < 1000$  мкм кезінде жеткілікті деңгейде тәжірибемен сәйкес келеді.

Жүйенің қозғалысын сипаттау үшін екі координат жүйесі енгізілген, олар қозғалмайтын –  $Oxy$ , және ротордың геометриялық центрімен қатты түрде байланысқан қозғалмалы –  $O_1\xi\eta$  координата жүйесі, мұндағы  $\eta$  – полярлық ось, ал  $\xi$  осы ротор массасының эксцентриситет векторы арқылы жүргізілген болып табылады,  $u$ ,  $v$  – сұйық бөлшегі жылдамдығының радиал және тангенциал құраушылары,  $e$  – статикалық теңгерімсіздік,  $\chi$  және  $\chi_0$  демпферлеу коэффициенттері. Жүйенің қозғалысы қозғалмайтын  $Oxyz$  координата жүйесіне қатысты қарастырылған. Ротордың геометриялық центр координаталары  $O_1(x_1, y_1)$ , ал оның массалар центрі  $O(x, y)$  арқылы белгіленген. Фундаменттің массалар центрі  $O_2(x_2, y_2)$  болып табылады (1-сурет).

Жүйенің кинетикалық энергиясы (3) түрінде анықталады:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2}\Omega_0^2 + \frac{M}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2). \quad (3)$$



Сурет 1 – Қуысы сұйықтықпен жартылай толтырылған домалау мойынтіректеріндегі фундаментке орналастырылған ротордың схемасы.

мұндағы  $m$  – ротордың массасы,  $J$  – ротордың полярлық инерция моменті, ал  $M$  – фундаменттің массасы.

Домалау мойынтіректерінің изотропты серпімді бейсызық өрістің потенциалдық энергиясы домалау мойынтіректерінің радиал бағыттағы деформациясынан тәуелді екенін ескерсек, яғни

$$\delta_r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (4)$$

Онда домалау мойынтіректерінің және серпімді тіректердің потенциалдық энергиясы:

$$П = \frac{c_2}{2}(x_2^2 + y_2^2)^2 + \frac{c_0}{2}((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) + \frac{c_1}{4}((x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4) + \dots \quad (5)$$

Сәйкесінше диссипация функциясы:

$$\Phi = \frac{\chi}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\chi_0}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2). \quad (6)$$

Ротордың массалар центрі қозғалмайтын координата жүйесіне қатысты келесідей түрде анықталады:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + e \cos \Omega_0 t, \\ y &= y_1 + e \sin \Omega_0 t, \end{aligned} \quad (7)$$

мұндағы  $e$  – ротор массалар центрінің геометриялық центрінен ауытқу шамасы. Ротор мен фундамент жазық параллель қозғалыс жасайды деп және қуыстағы сұйықтықтың бар болуы себепті туындайтын реакция күшін ескере отырып жүйенің қозғалыс теңдеулерін (8) түрінде жазайық

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c_0(x_1 - x_2) + c_1(x_1 - x_2)^3 + \chi\dot{x}_1 &= me\Omega_0^2 \cos \Omega_0 t + F_x, \\ m\ddot{y}_1 + c_0(y_1 - y_2) + c_1(y_1 - y_2)^3 + \chi\dot{y}_1 &= me\Omega_0^2 \sin \Omega_0 t + F_y, \\ M\ddot{x}_2 + c_2x_2 - c_0(x_1 - x_2) - c_1(x_1 - x_2)^3 + \chi_0\dot{x}_2 &= 0, \\ M\ddot{y}_2 + c_2y_2 - c_0(y_1 - y_2) - c_1(y_1 - y_2)^3 + \chi_0\dot{y}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

мұндағы  $F_x$  және  $F_y$  – сұйықтықтың реакция күшінің құраушылары (9) түрінде анықталады



$$\begin{aligned}
F_x &= Rh \int_0^{2\pi} P|_{r=R} \cos(\Omega_0 t + \varphi) d\varphi, \\
F_y &= Rh \int_0^{2\pi} P|_{r=R} \sin(\Omega_0 t + \varphi) d\varphi,
\end{aligned} \tag{9}$$

мұндағы  $h$  – ротор қуысының биіктігі,  $P|_{r=R}$  – ротор қабырғасындағы қысым. (10) түрінде комплексті айнымалыларды енгізейік

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2. \tag{10}$$

Онда (10) ескере отырып (8)-қозғалыс теңдеуін және (9)-теңдеуді комплексті жазықтықта (11) және (12) түрінде жазайық

$$\begin{aligned}
\ddot{z}_1 + n_0^2(z_1 - z_2) + n_1(z_1 - z_2)^3 + 2k\dot{z}_1 &= e\Omega_0^2 \exp(i\Omega_0 t) + \frac{F_r}{m}, \\
\ddot{z}_2 + n_2^2 z_2 - n_{01}^2(z_1 - z_2) - n_{10}(z_1 - z_2)^3 + 2k_0\dot{z}_2 &= 0, \\
n_0^2 = \frac{2c_0}{m}, \quad n_1 = \frac{2c_1}{m}, \quad 2k = \frac{\chi}{m}, \quad n_2^2 = \frac{2c_2}{M}, \\
n_{01}^2 = \frac{2c_0}{M} = \mu n_0^2, \quad n_{10} = \frac{2c_1}{M} = \mu n_1, \quad 2k_0 = \frac{\chi_0}{M}, \quad \mu = \frac{m}{M}.
\end{aligned} \tag{11}$$

мұндағы  $F_r$  (14) түрінде анықталатын сұйықтық реакция күшінің комплексті айнымалылар арқылы анықталатын өрнегі

$$F_r = Rh \int_0^{2\pi} P|_{r=R} e^{i(\Omega_0 t + \varphi)} d\varphi. \tag{12}$$

Сұйықтықтың жазық жағдайдағы қозғалыс теңдеулері (13) түрінде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega_0 v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \ddot{x} \cos(\Omega_0 t + \varphi) - \ddot{y} \sin(\Omega_0 t + \varphi), \\
\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega_0 u &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \ddot{x} \sin(\Omega_0 t + \varphi) - \ddot{y} \cos(\Omega_0 t + \varphi),
\end{aligned} \tag{13}$$

ал үзіліссіздік теңдеуі (14) түрінде

$$\frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \tag{14}$$

болады. Мұндағы  $P$  және  $\rho$  – сұйықтықтың кез-келген нүктесіндегі сәйкесінше қысымы мен тығыздығы.

Берілген жүйе үшін шекаралық шарттар келесідей түрде болады:

- ротор қабырғасындағы сұйықтық бөлшегі жылдамдығының радиал құраушысы нөлге тең

$$u|_{r=R} = 0, \quad (15)$$

- сұйықтықтың еркін бетіндегі қысым нольге тең

$$P|_{r=r_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = -\rho\Omega_0^2 r_0 u|_{r=r_0}. \quad (16)$$

Ротор қуысындағы сұйықтықтың реакция күші жүйенің меншікті және мәжбүрлі тербелістерінің жиілігінен тәуелді болуына байланысты (13)-(16) сұйықтықтың қозғалыс теңдеулерін шешу арқылы (12) теңдеу түріндегі реакция күші мен тербелістер жиілігі арасындағы байланысты орнату шарт. Ол үшін  $\Phi$  ағын функциясы және  $\psi$  жылдамдықтар потенциалын қолданып сұйықтық бөлшегінің жылдамдық құраушыларын (17) түрінде жазайық, яғни

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \Leftrightarrow u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (17)$$

(17) теңдеуді ескеріп (13) және (14) теңдеулерден (18) өрнегін алуға болады

$$\text{grad} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2\Omega_0 \psi + \frac{P}{\rho} + r[\ddot{x} \cos(\Omega_0 t + \phi) + \ddot{y} \sin(\Omega_0 t + \phi)] \right\} = 0. \quad (18)$$

Сәйкесінше үзіліссіздік теңдеуі

$$\Delta \Phi = 0 \quad (19)$$

түрінде болады. Онда (18) және (10) теңдеулерін ескеріп сұйықтық көлемінің кез-келген нүктесіндегі қысымды анықтауға мүмкіндік беретін (20) түріндегі өрнекті алуға болады, яғни

$$P = -\rho \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2\Omega_0 \psi + \ddot{z} r \exp(i(\Omega_0 t + \phi)) \right]. \quad (20)$$

Ротор мен фундамент гармоникалық тербелістер жасайды деп,  $z_1$  және  $z_2$  комплексті айнымалыларды (21) және (22) түрінде көрсетейік

$$z_1 = A \exp(i\Omega_0 t) + B \exp(i\omega t), \quad (21)$$

$$z_2 = C \exp(i\Omega_0 t) + D \exp(i\omega t). \quad (22)$$

Ағын функциясы мен жылдамдықтар потенциалын (19)-ге сәйкес гармоникалық болуына байланысты (23) және (24) түрінде іздеуге болады, яғни

$$\Phi = R(r) \exp(i(\sigma t - \varphi)), \quad (23)$$

$$\psi = R_1(r) \exp(i(\sigma t - \varphi)), \quad (24)$$

мұндағы  $\sigma = \omega - \Omega_0$  сұйықтық еркін бетінің тербеліс жиілігі. Демек осылайша (21)-(24) ескеріп, (18)-(20) өрнектерден  $R(r)$  және  $R_1(r)$  белгісіздері үшін (25) және (26) түріндегі өрнектерді аламыз

$$R(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (25)$$

$$R_1(r) = i \left( C_1 r - \frac{C_2}{r} \right). \quad (26)$$

$C_1$  және  $C_2$  белгісіздері (15) және (16) шекаралық шарттарынан табылады. Осылайша (12) және (20) қолданып  $F_r$  сұйықтықтың реакция күшін (27) түрінде анықтай аламыз

$$F_r = F_x + iF_y = Am_L e \Omega_0^2 \exp(i\Omega_0 t) + Bm_L \omega^2 \frac{(\sigma^2 - 2\Omega_0 \sigma - \Omega_0^2)}{(\gamma \sigma^2 - 2\Omega_0 \sigma - \Omega_0^2)} \exp(i\omega t), \quad (27)$$

мұндағы

$$q = \frac{R}{r_0}, \quad \gamma = \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1},$$

$m_L = \pi \rho R^2 h$  – ротор қуысын толық толтыру үшін қажетті сұйықтық массасы.  $e = 0$  кезіндегі гидродинамикалық күш [5, 256-б] жұмысында энергетикалық әдіспен табылған. Көріп тұрғанымыздай біздің нәтижелер жалпы жағдайға сәйкес келіп, әр түрлі аналогиялық роторлық жүйелердегі үдерістерді кеңірек зерттеуге мүмкіндік береді.

(21), (22) және (27) өрнектерді (11) қозғалыс теңдеуіне қоятын болсақ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  және  $D$  белгісіздерге қатысты (28), (29) және (30) түріндегі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз, яғни

$$\frac{3n_{10}P_{75}P_{23}}{2}(P_{23}A^2 - 2P_{01}A) - e_2P_{45} + \left(n_{01}^2 + \frac{3n_{10}}{2}P_{01}^2\right)P_{75} + \frac{3n_{10}}{4}P_{75}^3B^2 = 0,$$

$$\frac{3}{4}n_{10}P_{23}^3A^3 - \frac{9}{4}n_{10}P_{01}P_{23}^2A^2 + \left[P_{23}\left(n_{01}^2 + \frac{9}{4}n_{10}P_{01}^2\right) - e_0P_{23}^*\right]A - \quad (28)$$

$$-\left(e_0 + n_{01}^2 + \frac{3}{4}n_{10}P_{01}^2\right)P_{01} + \frac{3}{2}P_{75}^2n_{10}(P_{23}A - P_{01})B^2 = 0,$$

$$D = (P_4 + iP_5)B, \quad (29)$$

$$C = P_0 + iP_1 + A(P_2 + iP_3), \quad (30)$$

МҰНДАҒЫ

$$\mu_L = \frac{m_L}{m}, P_0 = \frac{\mu e \Omega_0^2 (n_2^2 - \Omega_0^2)}{m_0}, P_1 = -\frac{2k_0 \Omega_0^3}{m_0},$$

$$P_2 = \frac{\mu[(1 + \mu_L)\Omega_0^2](n_2^2 - \Omega_0^2) - 4kk_0\Omega_0^2}{m_0},$$

$$P_3 = -\frac{2\mu[(1 + \mu_L)\Omega_0^2k_0 + (n_2^2 - \Omega_0^2)k]\Omega_0}{m_0},$$

$$P_4 = \frac{\mu\omega^2(n_2^2 - \omega^2)\left(1 + \mu_L \frac{D_3}{D_4}\right) - 4kk_0\omega^2}{m_1},$$

$$P_5 = -\frac{2\mu\left[\left(1 + \mu_L \frac{D_3}{D_4}\right)\omega^2k_0 + (n_2^2 - \omega_0^2)k\right]\omega}{m_0},$$

$$m_1 = (n_2^2 - \omega^2)^2 + 4k_0^2\omega^2, m_0 = (n_2^2 - \Omega_0^2)^2 + 4k_0^2\Omega_0^2,$$

$$D_3 = \sigma^2 - 2\Omega_0\sigma - \Omega_0^2, D_4 = \gamma\sigma^2 - 2\Omega_0\sigma - \Omega_0^2,$$

$$P_{01} = P_0 + iP_1, P_{23} = 1 - P_2 - iP_3, P_{45} = P_4 + iP_5, P_{75} = P_7 - iP_5,$$

$$P_7 = 1 - P_4, P_{23}^* = P_2 + iP_3, e_0 = n_2^2 - \Omega_0^2 + 2ik_0\Omega_0,$$

$$e_2 = n_2^2 - \omega^2 + 2k_0i\omega.$$

## 1.2 Жүйенің меншікті тербелістері

«Ротор-Сұйықтық-Фундамент» жүйесінің меншікті тербелістерін зерттеу мақсатында ротордың теңгерімсіздігі жоқ деп алайық, ол жағдайда (11)-қозғалыс теңдеулері (31) түрінде жазылады

$$\ddot{z}_1 + n_0^2(z_1 - z_2) + n_1(z_1 - z_2)^3 + 2k\dot{z}_1 = \frac{F_r}{m}, \quad (31)$$

$$\ddot{z}_2 + n_2^2z_2 - n_{01}^2(z_1 - z_2) - n_{10}(z_1 - z_2)^3 + 2k_0\dot{z}_2 = 0.$$

Бұл жағдайда сұйықтың реакция күші  $F_r$ , (32) түрінде болады

$$F_r = Bm_L \omega^2 \frac{(\sigma^2 - 2\Omega_0\sigma - \Omega_0^2)}{(\gamma\sigma^2 - 2\Omega_0\sigma - \Omega_0^2)} \exp(i\omega t). \quad (32)$$

Бейсызықтықтың дәрежесі аз болуына байланысты (31) теңдеулер жүйесінің шешімін (33) түрінде іздейміз, яғни

$$z_1 = B e^{-i\omega t}, z_2 = D e^{-i\omega t}. \quad (33)$$

(32) және (33)-ті (31)-ке қойып ротор мен фундаменттің меншікті тербелістер амплитудаларын анықтайтын сәйкесінше  $B$  және  $D$  амплитудаларына қатысты (34) түріндегі өлшемсіздендірілген алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз, яғни

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{4[g_1 P_8 - \mu(1 - P_8)]}{3\mu c_{10}(1 - P_8)^3}}, \\ D &= (P_9 + iP_{10}) \sqrt{\frac{4[g_1 P_8 - \mu(1 - P_8)]}{3\mu c_{10}(1 - P_8)^3}}, \\ |B| &= \sqrt{(\operatorname{Re} B)^2 + (\operatorname{Im} B)^2}, |D| = \sqrt{(\operatorname{Re} D)^2 + (\operatorname{Im} D)^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} n_{02} &= \frac{n_2}{n_0}, k_{00} = \frac{k_0}{n_0}, k_{01} = \frac{k_0 k}{n_0^2}, k_{10} = \frac{k}{n_0}, c_{10} = \frac{c_1}{c_0}, \tau = \frac{\omega}{n_0}, s = \frac{\Omega_0}{n_0}, \\ D &= P_8 B, P_8 = P_9 + iP_{10}, \\ P_9 &= \frac{\mu[\tau^2 D_6 (n_{02}^2 - \tau^2) - 4k_{01} \tau^2]}{g_0}, \\ P_{10} &= \frac{-2\mu[k_{10}(n_{02}^2 - \tau^2) + \tau^2 k_{00}]}{g_0}, \\ g_0 &= (n_{02}^2 - \tau^2)^2 + 4k_{00}^2 \tau^2, \\ g_1 &= (n_{02}^2 - \tau^2) + 2ik_{00} \tau, \\ D_6 &= 1 + \mu_L \frac{\tau^2 - 4\tau s + 2s^2}{\gamma\tau^2 - 2(\gamma + 1)\tau s + (\gamma + 1)s^2}, \\ g_1 P_8 &= \mu(1 - P_8) + \frac{3\mu c_{10}}{4}(1 - P_8)^3 B^2. \end{aligned}$$

Бұл жердегі  $\tau$  және  $s$  өлшемсіз жүйенің меншікті жиілігі мен ротордың бұрыштық жылдамдығы.

Байқағанымыздай ротор мен фундаменттің меншікті тербеліс амплитудалары жүйенің меншікті жиілігінен тәуелді болып табылады. Яғни амплитуда-жиіліктік сипаттамалар ротордың фиксацияланған бұрыштық жылдамдығының әр түрлі мәндерінде меншікті жиілікті вариациялау арқылы тұрғызылады. Жүйенің меншікті тербелістерін зерттеу мақсатында (34) жүйеден ұйытқушы күштің (яғни ротордың бұрыштық жылдамдығының) фиксацияланған жиіліктерінде ротор қуысы сұйықтықпен толтырылу деңгейі әртүрлі болған кездегі ротор мен фундаменттің меншікті тербелістерінің амплитудасы анықталып және тиісті амплитуда-жиіліктік сипаттамалары (2 – 11-суреттер) тұрғызылды.

Қуыстағы сұйықтың көлемі аз болған кезде  $\gamma = 13.8$  ( $r_0 = 0.93R$ ) (2 және 3 суреттер) ротор мен фундамент автотербелістерінің екі облысы байқалады. Ротордың  $s$  бұрыштық жылдамдығының 0.3-тен 0.9-ға дейін өзгеру интервалында ротор мен фундамент автотербелісінің амплитудасы монотонды түрде өседі және бұл кезде жүйенің меншікті жиіліктері  $0.25 < \tau < 0.85$  аралығында орналасады.  $s$  мәнінің 0.9-дан 1.1 өзгерісі кезінде ротор мен фундаменттің автотербелісі амплитудасы тез кемиді және нольге дейін жетеді. Бұл кезде  $0.3 < s < 1$  интервалында автотербелістердің үшінші облысы жоғалады. Ротордың  $s$  бұрыштық жылдамдығы 0.5-тен 0.85-ке дейін өскен сайын ротор мен фундамент автотербелісінің орнықсыз алғашқы екі облысы  $0.41 < \tau < 0.85$  кезінде меншікті жиіліктерінің өсу бағытына қарай ығысады.  $0.9 < s < 1.2$  интервалында және  $\tau = 0.85$  аймағында ротор мен фундамент автотербелісінің аз мәніндегі бір ғана орнықсыз облыс қалады.  $s > 1.2$  ротор бұрыштық жылдамдығының өсуі кезінде үш орнықсыз облыс болады. Бұл жерде ротор мен фундамент автотербелісінің амплитудасы аз мәнге ие. Бұл кезде амплитуда алдымен өседі, сосын,  $s = 2.8$  мәнінен бастап кеми түседі. Бұл кезде  $s$  шамасы өскен сайын жүйенің орнықсыз автотербелістері орын алатын  $\tau$  меншікті жиіліктерінің мәні артады.

Қуыс толуы артқан сайын үшінші облыс жоғала бастайды. Мысалы,  $\gamma = 4.56$  ( $r_0 = 0.8R$ ) кезінде (4 және 5 суреттер) үшінші орнықсыз облыс  $s > 1$  мәнінен басталады.  $B$  – ротор мен  $D$  – фундаменттің автотербеліс амплитудасының жоғары мәндері  $0.3 < s < 1$  интервалында орын алады. Бұл кезде бірінші орнықсыздық облысы  $0.3 < s < 1.0$  және  $0.45 < \tau < 0.85$  интервалында, ал екінші орнықсыздық облысы  $0.3 < s < 0.6$  интервалында орналасады. Бұл кезде жүйенің меншікті жиілігі  $\tau = 1.4$  бастап  $\tau = 0.6$  дейін ақырындап кемиді. Ары қарай  $0.6 < s < 1$  интервалында жүйенің  $\tau$  меншікті жиіліктері ақырындап өсе бастайды. Ал  $s > 1.2$  кезінде үш орнықсыздық облысы пайда болады, бірақ ротор мен фундамент автотербелісінің амплитудасы айтарлық аз шама болады.

Қуыстың толу дәрежесі арутымен тек қана екі орнықсыз автотербелістер облысы қалады.  $\gamma = 2.6$  ( $r_0 = 0.67R$ ) кезінде  $0.3 < s < 0.5$  интервалында  $s$  өскен сайын автотербелістер амплитудасы өсе түседі (6 және 7 суреттер).  $0.5 < s < 0.6$  интервалында  $\tau$  мәні кенеттен кеми бастайды, ал 0.6

$s < 1$  интервалында  $\tau$  мәні және автотербелістер амплитудасы қайта өсе бастайды, бұл кезде автотербелістер амплитудасы айтарлықтай жоғары мәнге ие болады.  $1 < s < 1.2$  интервалында ротор мен фундаменттің орнықсыз облыстары сәйкес автотербелістер мен жүйенің  $\tau$  меншікті жиіліктері (критикалық жиіліктері) кенет кему бастайды.  $1.2 < s < 2.5$  кесіндісінде ротор мен фундаменттің автотербелісі ақырлы аз амплитуда мен жүйенің  $\tau$  меншікті жиіліктері және критикалық жиіліктері ақырындап өсе бастайды.  $s > 2.5$  кезінде автотербелістер амплитудасы кенет өседі және жүйенің  $\tau$  меншікті жиіліктері тез өсе бастайды.

8 және 9 суреттерде ротор мен фундаменттің меншікті жиіліктері мен амплитудаларының өлшемсіз бұрыштық жылдамдығының әртүрлі мәндеріндегі ротор қуысы жартылай сұйықпен толтырылған, яғни  $\gamma = 1.67$  кезіндегі тәуелділігі келтірілген. Графиктерден  $s$  мәнінің нөлден бірге дейін өскен кезіндегі ротор мен фундаменттің меншікті тербелісінің резонанстық амплитудалары  $\tau$  мәнінің өсу зонасына қарай ығысады, ал максимум мәндері керісінше  $\tau$  мәнінің кему зонасына қарай ығысады. Бұл кезде ротор мен фундаменттің меншікті тербелісінің резонанстық амплитудалары  $0.65 < \tau < 0.85$  интервалында, ал максимум мәні  $0.85 < \tau < 1.8$  интервалында жатады.  $0.6 < s < 0.85$  кезінде ротор мен фундаменттің меншікті жиілігінің резонанстық амплитудаларының минимум және максимум мәндері  $0.65 < \tau < 0.85$  интервалында жатады. Ары қарай  $s$  мәнінің 1-ден 1.4 мәніне дейін ротор мен фундаменттің автотербелісі амплитудаларының шыңдары, сондай-ақ,  $\tau$  меншікті жиіліктері кемиді.  $s = 1.7$  кезінде ротордың меншікті тербелісі резонанстық амплитудасының максимум мәні  $\tau = 0.95$  болғанда, ал минимум мәні  $\tau = 1.2$  болғанда орын алады. Бұл кезде фундаменттің резонанстық шыңдары керісінше орналасады. Ротордың жоғары жылдамдықтарында, яғни  $s > 1.7$  кезінде ротор мен фундаменттің меншікті тербелісі амплитудасының максимум және минимум мәндері өседі, бұл кезде  $\tau$  меншікті жиілік мәнінің де өсуі байқалады. Ротор қуысы жартысынан аса толтырылған кезде автотербелістер амплитудасы мен меншікті жиіліктер өзгерісі қуыстың үштен бірі толтырылған кездегіге ұқсас болады (6 – 9 суреттер). Бұл кезде жүйеде алдыңғыға қарағанда аз мәнді амплитудалар орын алады.

Ротор қуысы  $\gamma = 1.03$  ( $r_0 = 0.125R$ ) мәніне сәйкес көбірек толтырылған кезде (10 және 11 суреттер) ротор мен фундаменттің автотербеліс амплитудасы  $0.3 < s < 1$  және  $s > 1.8$  бұрыштық жылдамдығының үлкен диапазонында нақты бір мәнге ие, бұл кезде меншікті тербелістер жиілігі  $\tau = 0.85$  тең болады.  $0.3 < s < 0.5$  және  $1.4 < s < 1.8$  интервалында ротор мен фундамент автотербелісінің аз мәнді амплитудалары байқалатын екінші орнықсыздық облысы пайда болады. Ротор қуысы сұйықпен айтарлықтай толтырылған кезде тұрақты амплитуда мен өздік жиіліктерден тұратын бір ғана орнықсыздық облысы қалады.

Осылайша, ротор мен фундаменттің максималды амплитудалары ротордың қуысы үштен бірге толтырылған кезде орын алатыны байқалады. Сәйкесінше ротор қуысы толық сұйықпен толтырылған кезде автотербеліс амплитудалары ең аз мәнге ие болады.

12 және 13 суреттерде ротор мен фундаменттің ротор қуысында сұйықтық бар жағдайда қаңқалық қисықтары келтірілген. Графиктерден көрініп тұрғандай жалпы жағдайда  $s$ -тің кез-келген мәні үшін жүйенің меншікті тербелістерінің амплитудалары шексіздікке ұмтылатын үш критикалық  $\tau$  жиілігі орын алады.

Меншікті тербелістердің бірінші критикалық жиілігі  $\tau = 0.11$  аймағында орналасқан. Көріп тұрғанымыздай ол ротордың  $s$  – бұрыштық жылдамдығынан және де ротордың қуысындағы  $\gamma$  – сұйықтық көлемінен тәуелсіз болып табылады. Мысалы ротор қуысындағы сұйықтық көлемінің артуымен, яғни  $\gamma \rightarrow 1$  болған кезде, критикалық жиілік  $\tau$ -дың өсу бағытында  $\tau \leq 0.14$  дейін ығысады.

$s$ -тің өсуімен сұйықтық көлемінің кез-келген шамасында  $\tau$ -дың артуы байқалады. Меншікті тербелістердің үшінші критикалық жиілік сұйықтық көлемінің аз болған кезінде және ротордың айналу жылдамдығы төмен болған жағдайда орын алады. Және сол сияқты ротордың айналу жылдамдығы жоғары болған жағдайда және сұйықтық көлемінің көп болған кезінде де меншікті тербелістердің үшінші критикалық жиілігі байқалады.  $\gamma > 1.03$ ,  $s > 1$  және  $\gamma < 13.8$ ,  $s < 1.4$  кезінде жүйенің үшінші критикалық жиілігі жойылады.

Сұйықтығы бар ротор мен фундаменттің қаңқалық қисықтары үшін

$$\omega = \sqrt{\frac{2c_2}{M(1 + \mu D_6)}},$$

немесе

$$\tau = n_{02} \sqrt{\frac{1}{1 + \mu D_6}},$$

вертикаль асимптота болып табылады.

Ротор мен фундаменттің меншікті тербелістерінің екі (жалпы жағдайда үш) критикалық жиіліктің  $\gamma$  және  $s$  кез-келген мәндерінде пайда болуы, ротор қуысындағы сұйықтықтың еркін бетінің тербелістері салдарынан орын алады.

Синхронды прецессия кезінде, яғни  $\tau = s$  жағдайында, ротор мен фундаменттің автотербелістер амплитудасы ротор қуысындағы сұйықтықтың көлемінен тәуелсіз болып табылып, (34) теңдеулер жүйесінен  $D_6 = 1 + \mu_L$  болған жағдайда анықталады.

$k_0 = k$  жағдайында

$$D_6 (n_{02}^2 - \tau^2) \tau^2 - n_{02}^2 + \tau^2 (1 + \mu D_6) = 0,$$



яғни ротор мен фундаменттің меншікті тербелістер амплитудасы нольге тең болады. Бұл жағдайға сәйкес келетін меншікті тербелістер жиіліктерін келесідей түрде табуға болады, яғни

$$\tau^4 + t_3 s \tau^3 + (t_2 s^2 + d_0) \tau^2 + t_1 \tau + t_0 = 0,$$

мұндағы

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{i_3}{i_0}, t_2 = \frac{i_2}{i_0}, t_1 = \frac{i_1}{i_0}, t_0 = \frac{2d_0}{i_0}, i_0 = \mu\gamma - \mu_L(1 - \mu), \\ i_1 &= -4d_0, i_2 = \mu\gamma_1 - 2\mu_L(1 - \mu), i_3 = 2[2\mu_L(1 - \mu) - \mu\gamma_1], \\ \gamma_1 &= \gamma + 1, d_0 = \mu\mu_L c_{20}, c_{20} = \frac{c_2}{c_0}. \end{aligned}$$

Егерде

$$n_{02}^2 + \tau^2(1 + \mu D_6) = 0$$

болса, онда фундамент пен ротордың меншікті тербелістер амплитудалары шексіздікке ұмтылады. Бұл жағдайға сәйкес келетін меншікті тербелістер жиіліктерін келесідей түрде табуға болады, яғни

$$\tau^4 + \lambda_3 s \tau^3 + (\lambda_2 s^2 + \delta_0) \tau^2 + \lambda_1 s \tau + s^2 \lambda_0 = 0$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{-2\eta_1}{\eta_0}, \lambda_2 = \frac{\eta_1}{\eta_0}, \lambda_1 = \frac{2\gamma_1 \mu c_{20}}{\eta_0}, \lambda_0 = -\frac{\gamma_1 \mu c_{20}}{\eta_0}, \\ \eta_0 &= \gamma(1 + \mu) + \mu\mu_L, \eta_1 = \gamma_1(1 + \mu) + \mu\mu_L, \delta_0 = -\frac{\gamma \mu c_{20}}{\eta_0}. \end{aligned}$$

Егерде  $n_{02}^2 - \tau^2 \rightarrow 0$ , яғни

$$\tau \rightarrow \pm n_{02} = \pm \sqrt{\frac{\mu c_2}{c_0}},$$

және  $\gamma \tau^2 - 2(\gamma + 1)s\tau + (\gamma + 1)s^2 \rightarrow 0$ , немесе

$$\tau_{1,2} \rightarrow s \frac{\gamma + 1}{\gamma} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma + 1}} \right),$$

болса, онда  $P_8 \rightarrow \infty$  екені шығады. Бұл жағдайда (34) теңдеулер жүйесінен  $B = 0$  және  $D = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{c_0}{c_1}} i$ , яғни ротордың тербелістері орын алмайды, ал фундамент болса өз кезегінде  $Oy$  осы бағытында қозғалыс жасайды.

Егерде

$$(\gamma + \mu_L)\tau^2 - 2(\gamma + 1 + 2\mu_L)s\tau + (\gamma + 1 + 2\mu_L)s = 0,$$

немесе

$$\tau_{1,2} \rightarrow \frac{(\gamma + 1 + 2\mu_L)s}{(\gamma + \mu_L)} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{1 + \mu_L}{\gamma + 1 + 2\mu_L}} \right),$$

болса, онда  $P_8 = 0$ . Бұл жағдайда ротор мен фундаменттің меншікті тербелістер амплитудалары  $B = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{c_0}{c_1}} i$  және  $D = 0$  тең, яғни фундамент тыныштықта, ал ротор  $Oy$  осы бағытында қозғалыс жасайды.

$k_0 \neq 0, k \neq 0$  жағдайында егерде  $n_{02}^2 - \tau^2 \rightarrow 0$ , яғни

$$\tau \rightarrow \pm n_{02} = \pm \sqrt{\frac{\mu c_2}{c_0}},$$

немесе

$$(\gamma + \mu_L)\tau^2 - 2(\gamma + 1 + 2\mu_L)s\tau + (\gamma + 1 + 2\mu_L)s^2 = 0,$$

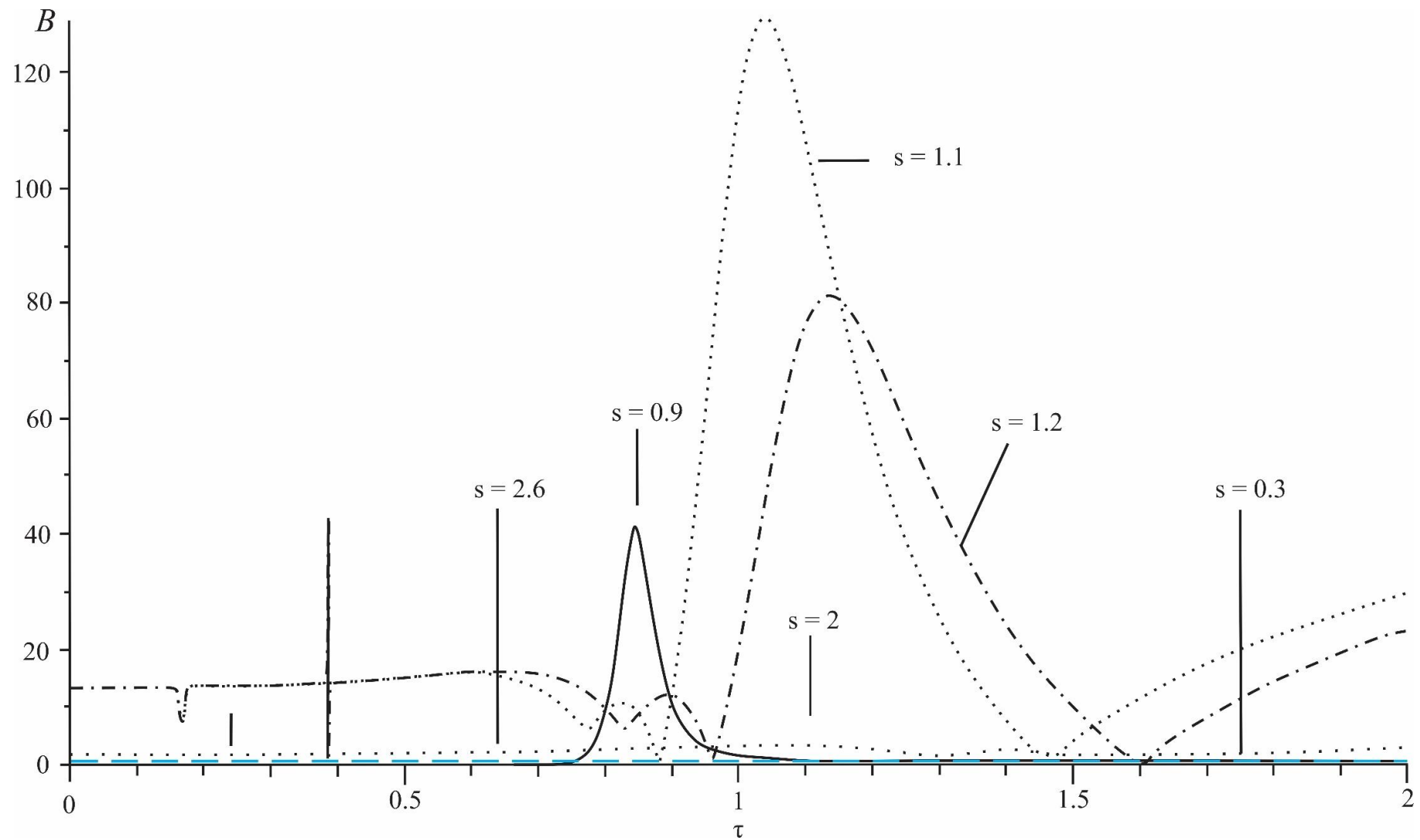
$$\tau_{1,2} \rightarrow \frac{(\gamma + 1 + 2\mu_L)s}{(\gamma + \mu_L)} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{1 + \mu_L}{\gamma + 1 + 2\mu_L}} \right),$$

болғанда,  $P_8 = -\frac{\mu k}{k_0}$ . (34) теңдеулер жүйесінен бұл жағдайда ротор мен фундаменттің амплитудалары шектелген болып табылады.

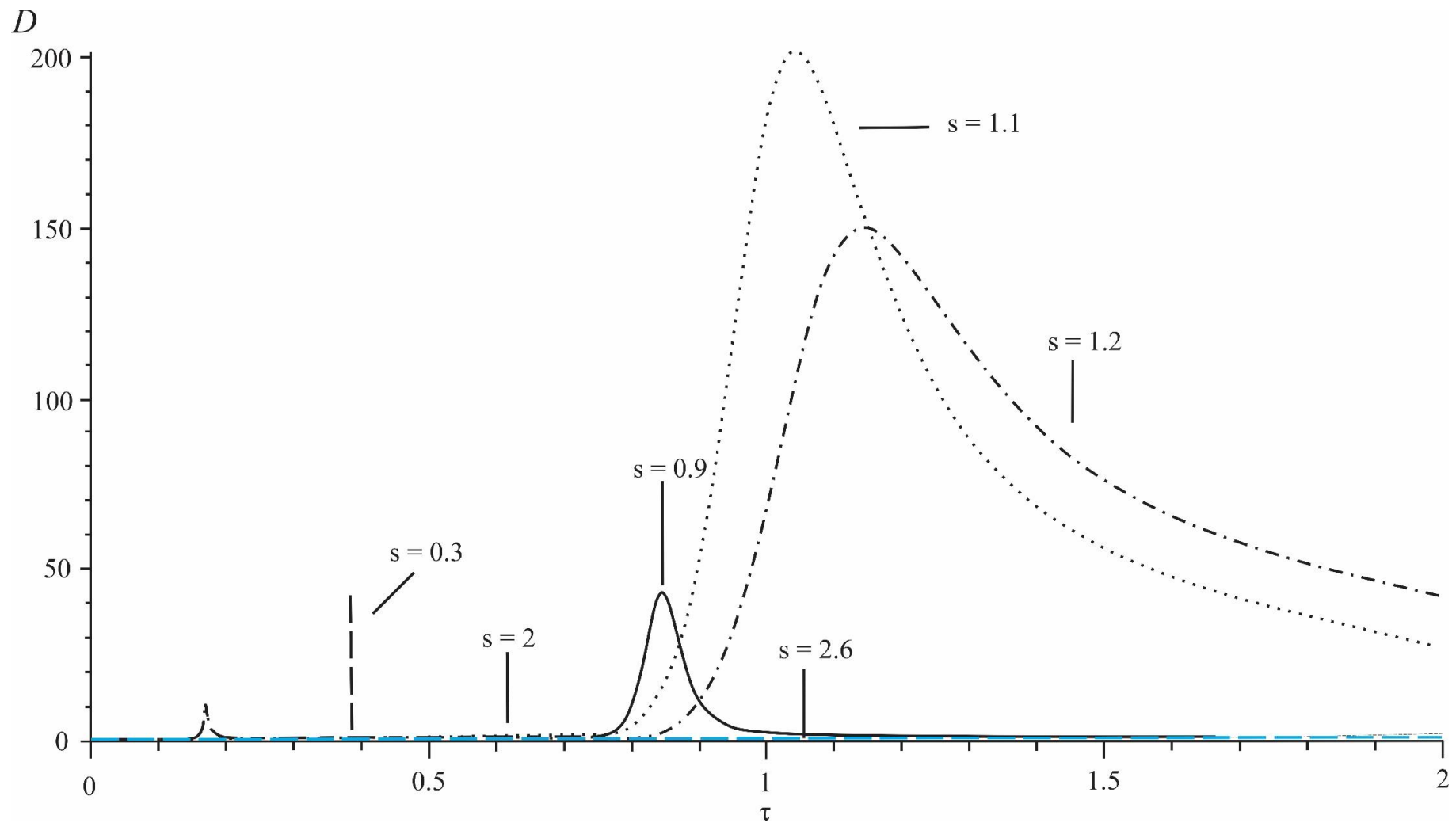
Егерде  $\gamma\tau^2 - 2(\gamma + 1)s\tau + (\gamma + 1)s^2 \rightarrow 0$  немесе

$$\tau_{1,2} \rightarrow s \frac{\gamma + 1}{\gamma} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma + 1}} \right),$$

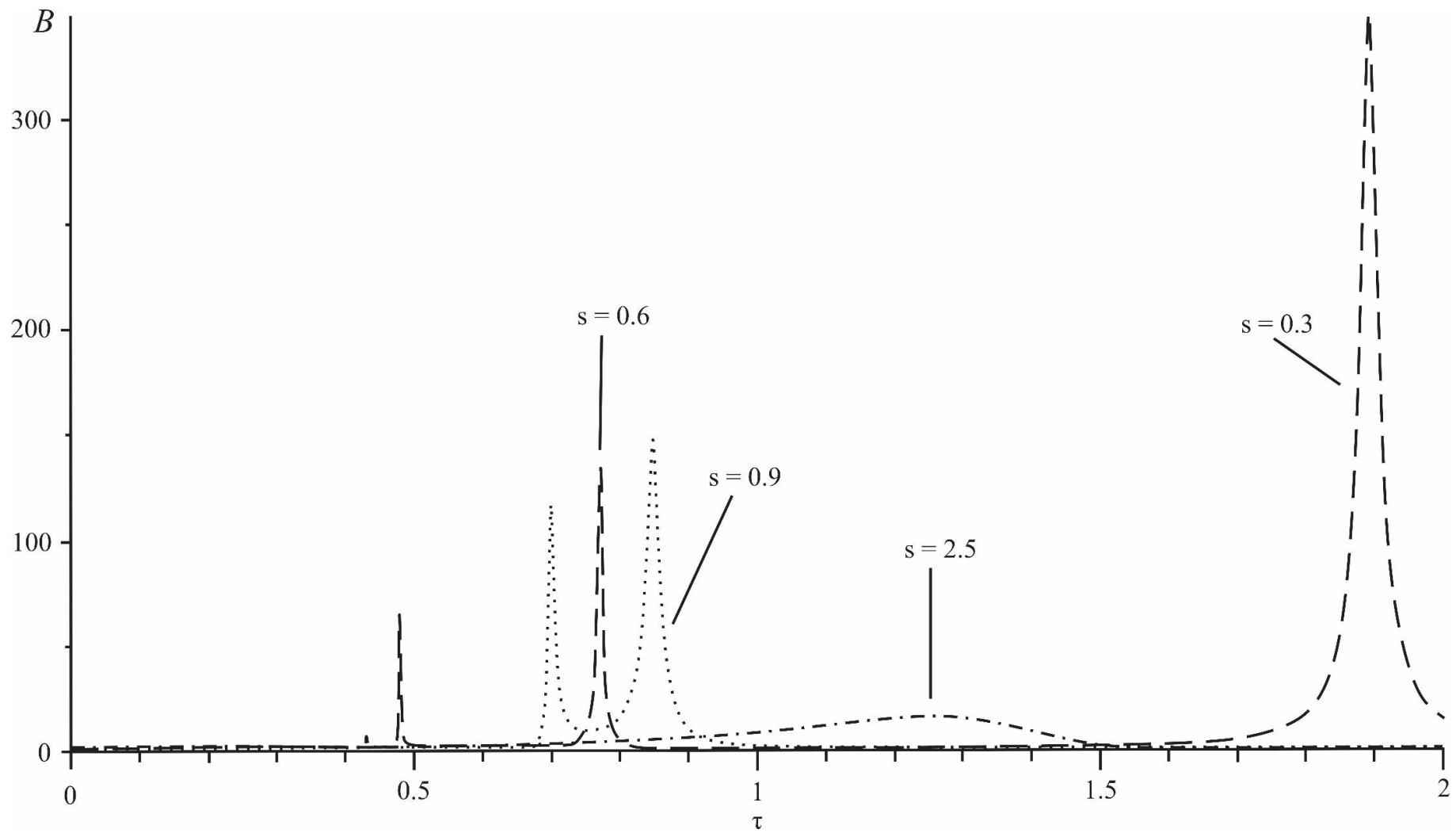
болса, онда  $P_8 \rightarrow \infty$ . Бұл жағдайда ротор мен фундамент амплитудалары сәйкесінше  $B = 0$  және  $D = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{n_{02}^2 - \tau^2 + \mu + 2k_{00}\tau i}{\mu c_{10}}}$  болады.



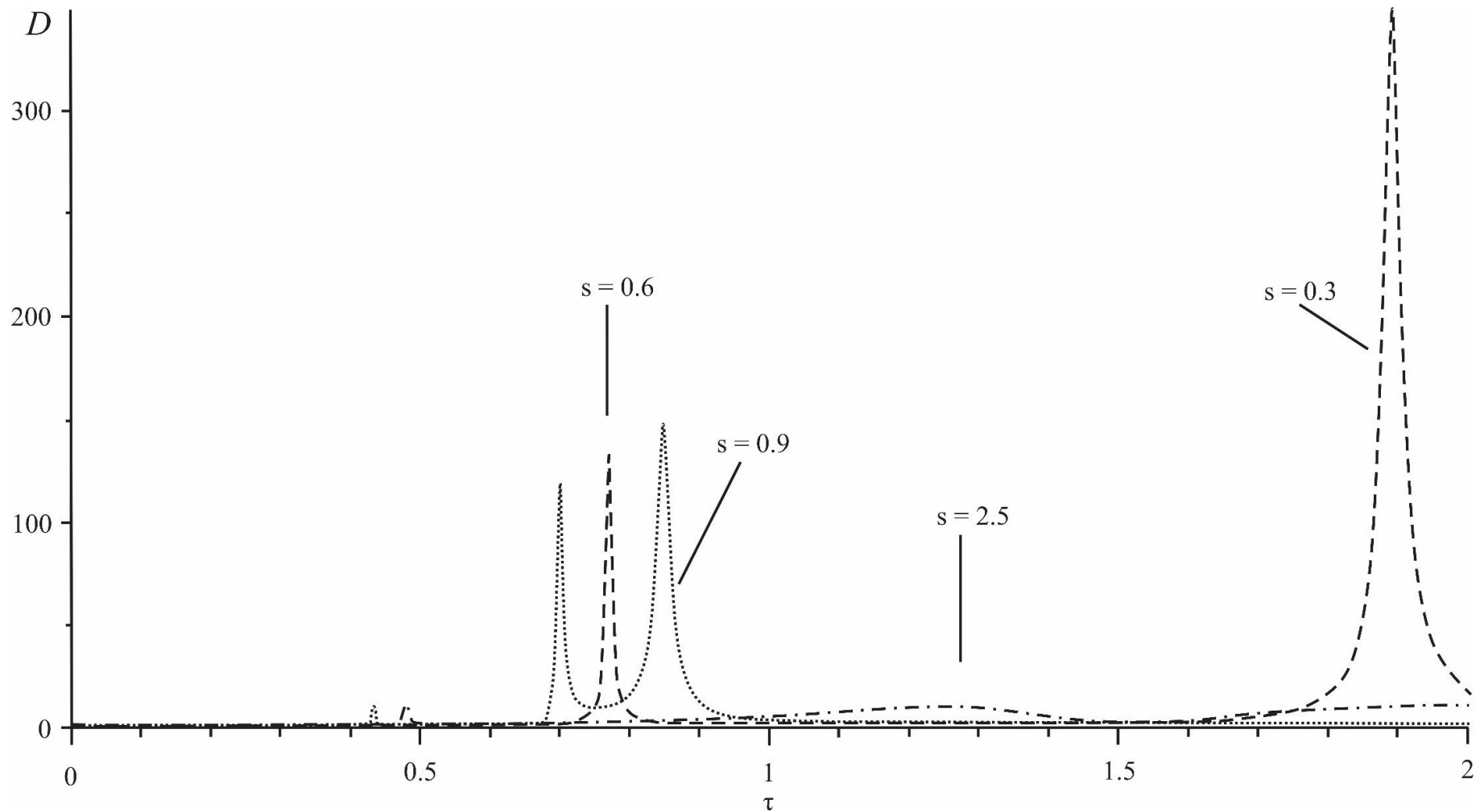
Сурет 2 –  $\gamma = 13.8$  кезіндегі ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы



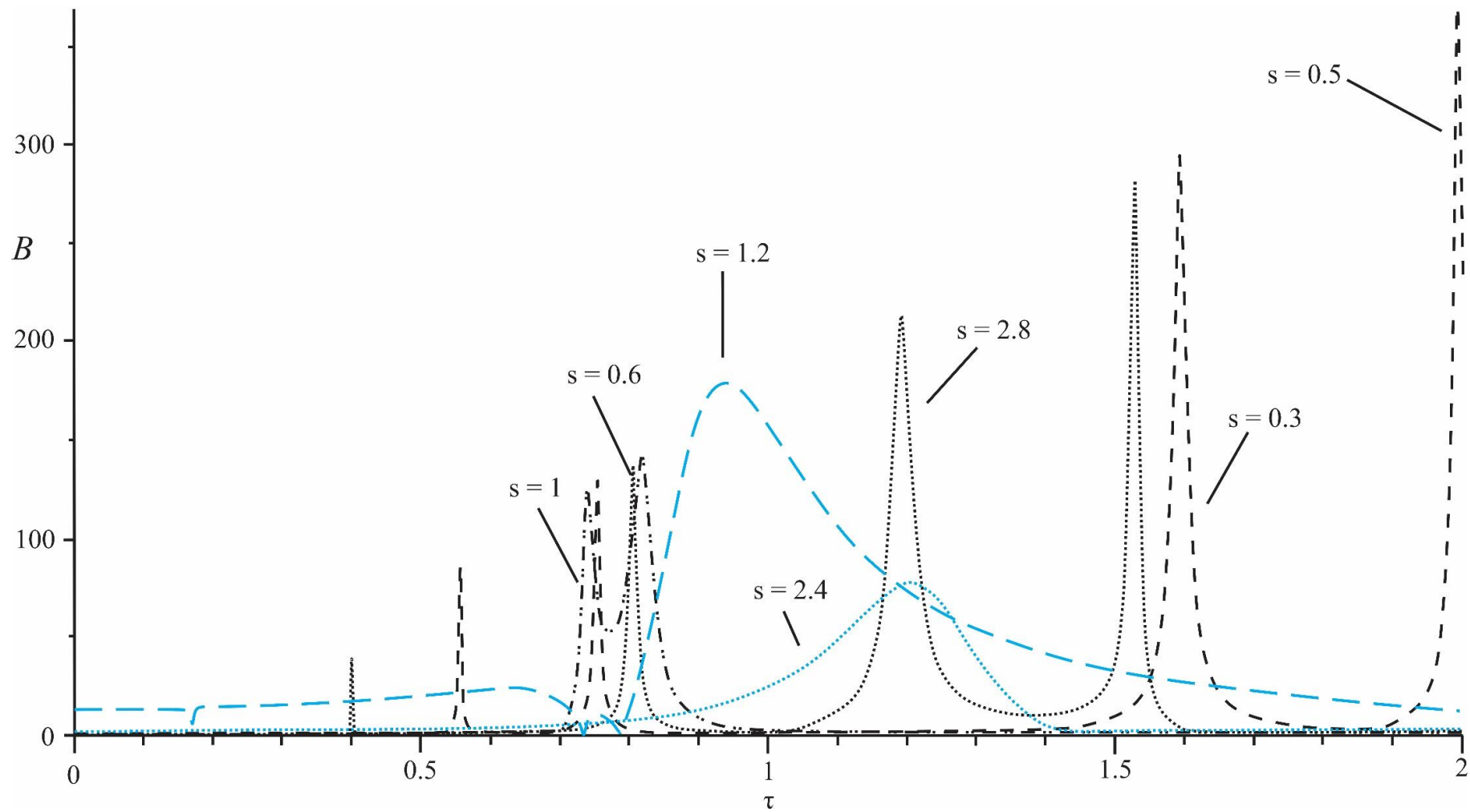
Сурет 3 –  $\gamma = 13.8$  кезіндегі фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы



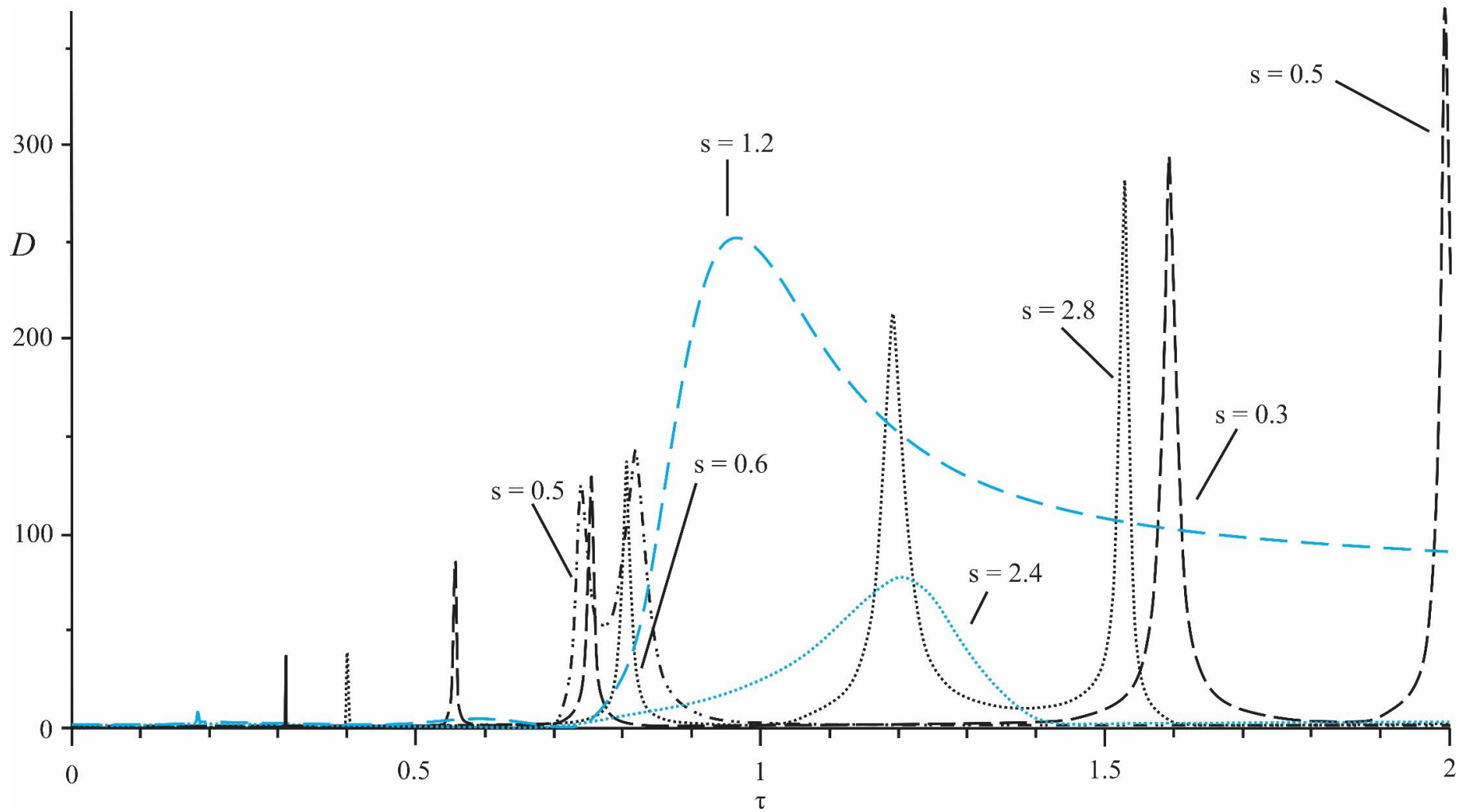
Сурет 4 –  $\gamma = 4.56$  кезіндегі ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы



Сурет 5 –  $\gamma = 4.56$  кезіндегі фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы

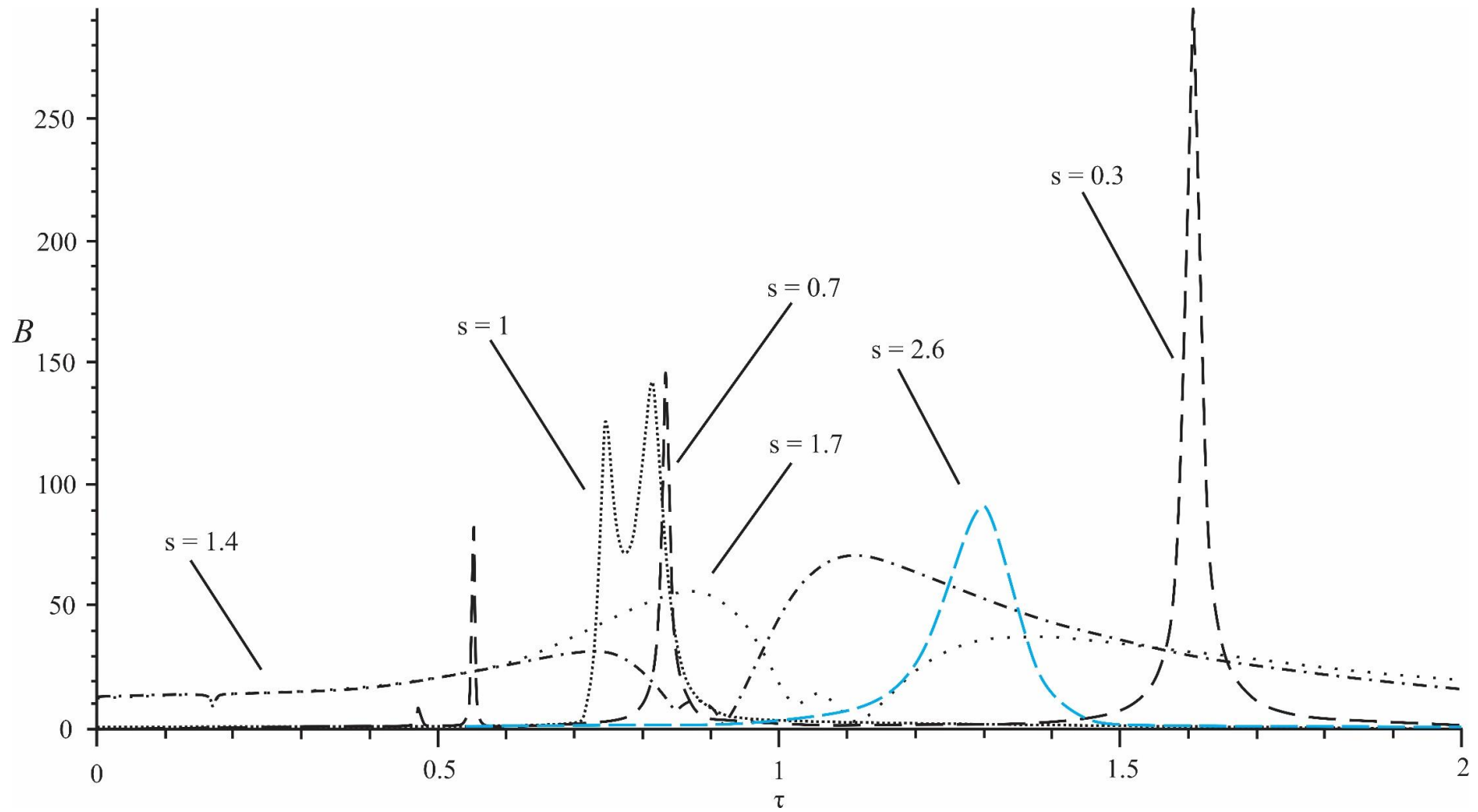


Сурет 6 –  $\gamma = 2.6$  кезіндегі ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы

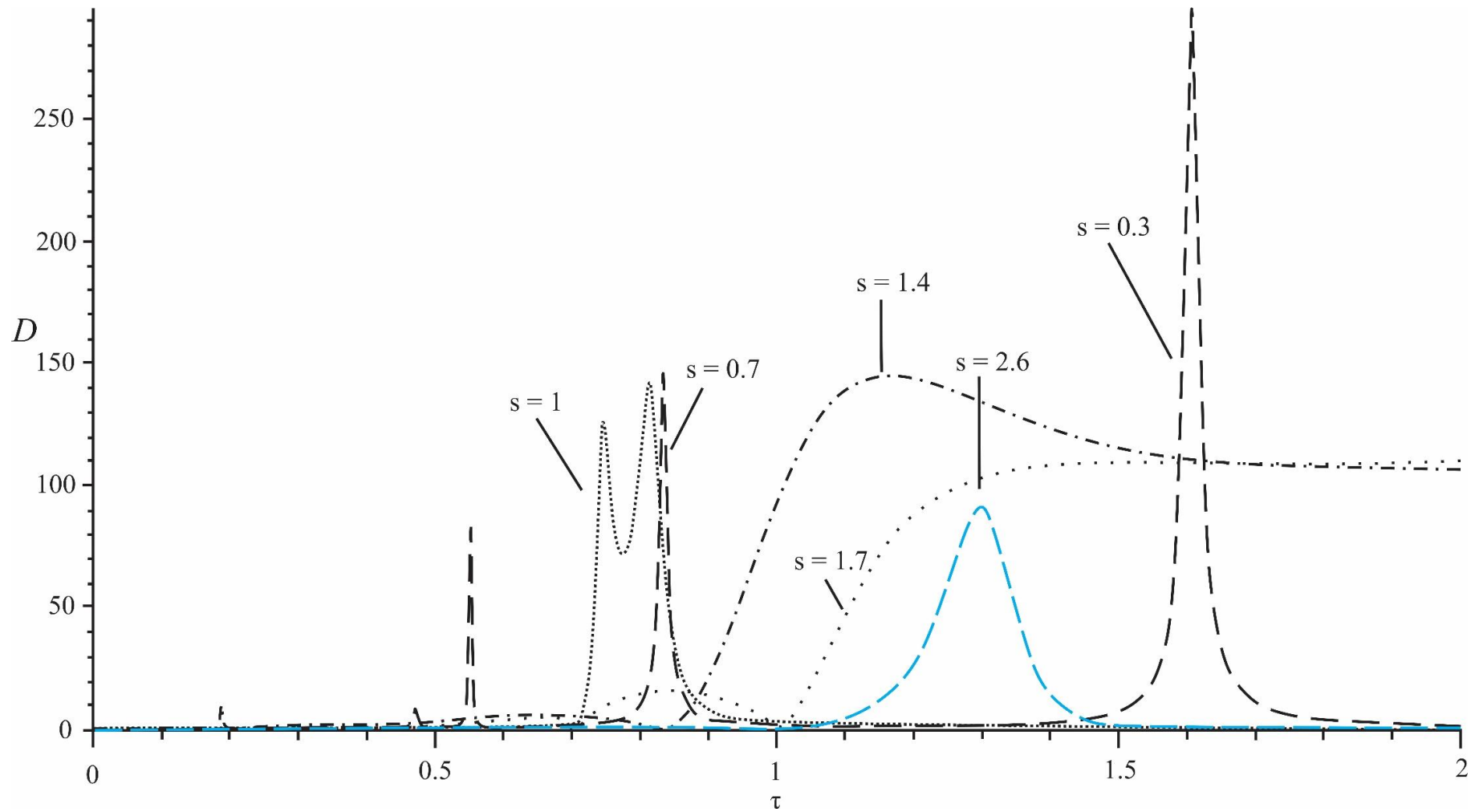


Сурет 7 –  $\gamma = 2.6$  кезіндегі фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы

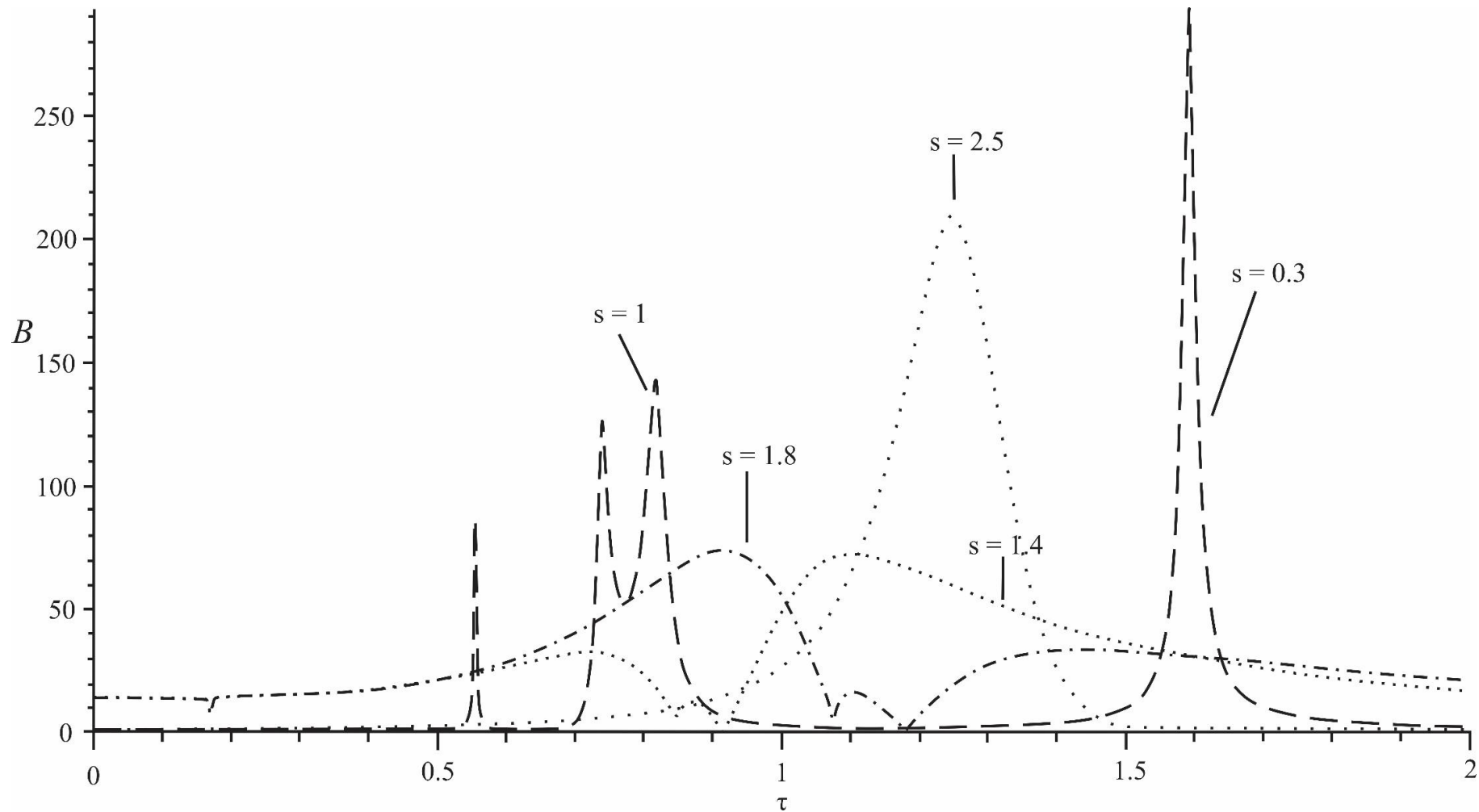




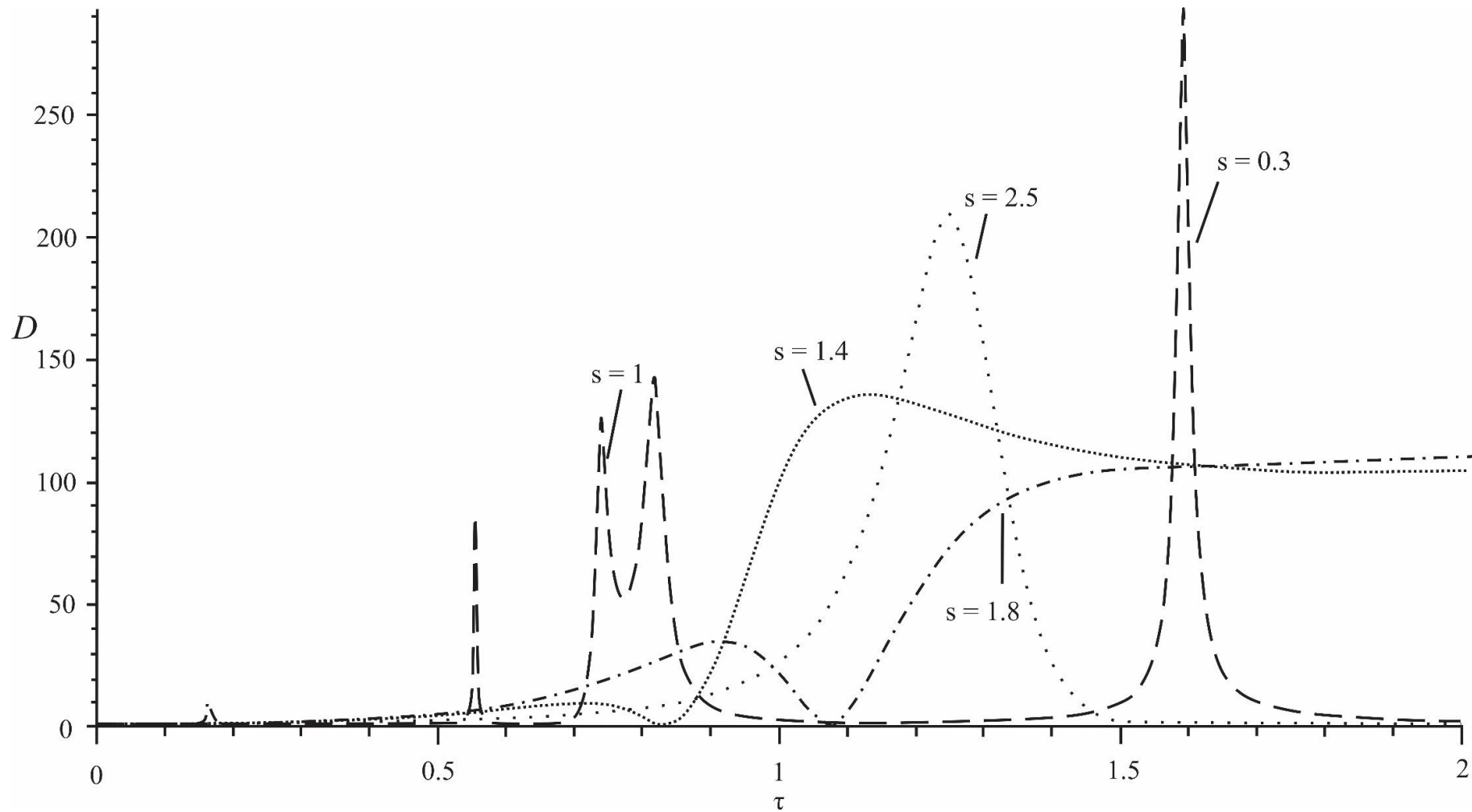
Сурет 8 –  $\gamma = 1.67$  кезіндегі ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы



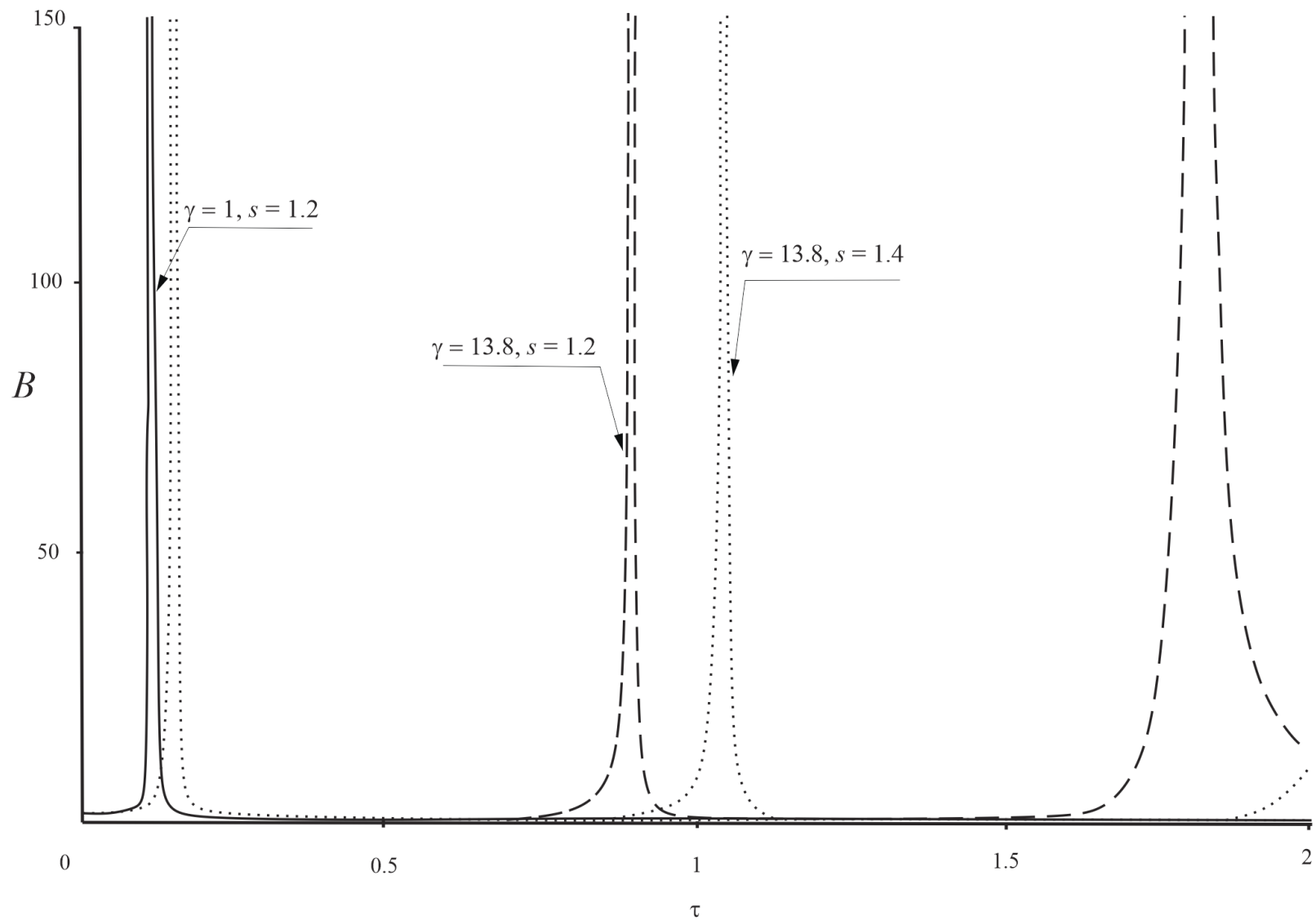
Сурет 9 –  $\gamma = 1.67$  кезіндегі фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы



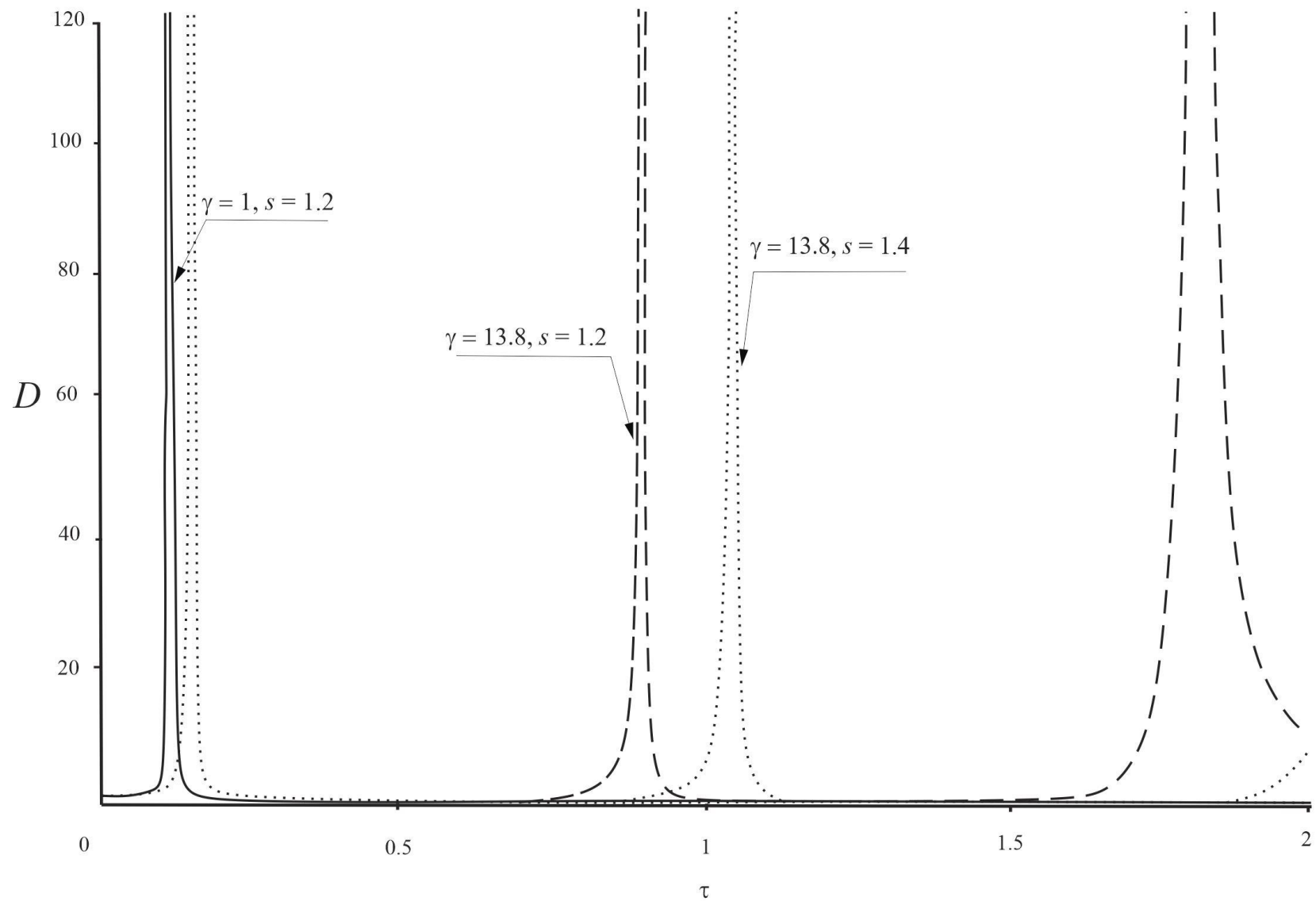
Сурет 10 –  $\gamma = 1.03$  кезіндегі ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы



Сурет 11 –  $\gamma = 1.03$  кезіндегі фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамасы



Сурет 12 – Қуыстағы сұйықтықтың мөлшері және бұрыштық жылдамдық әр түрлі болған кездегі ротордың қаңқалық қисықтары



Сурет 13 – Қуыстағы сұйықтың мөлшері және бұрыштық жылдамдық әр түрлі болған кездегі фундаменттің қаңқалық қисықтары

### 1.3 Жүйенің мәжбүрлі тербелістері

Статикалық теңгерімсіздіктің әрқашан бар болуына байланысты туындайтын ротор мен фундаменттің мәжбүрлі тербелістерін зерттеу шарт. Ұйытқушы күш салдарынан ротор мен фундамент орныққан гармоникалық тербелістер жасайды деп (11)-теңдеулер жүйесінің шешімін (35) және (36) түрінде іздейміз

$$z_1 = Z_r \exp(i(\Omega_0 t - \phi)), \quad (35)$$

$$z_2 = Z_f \exp(i(\Omega_0 t - \phi)). \quad (36)$$

(35), (36) және (32) теңдеулерін (11) қойып  $A$ ,  $B$ ,  $Z_r$  және  $Z_f$  белгісіз амплитудаларға қатысты (37)-(40) түріндегі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз, яғни

$$Z_r = \frac{f_0}{f_1}, Z_f = \frac{f}{f_1}, \quad (37)$$

$$A = \left( \frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2} - \frac{ip_2}{p_1^2 + p_2^2} \right) B, \quad (38)$$

$$m_0 Z_f - (Z_r - Z_f) \left( n_{01} + n_{10} \left( \frac{3}{4} (Z_r - Z_f)^2 + \frac{3}{2} (A - B)^2 \right) \right) = 0, \quad (39)$$

$$m_2 B + (A - B) \left( -n_{01} - n_{10} \left( \frac{3}{2} (Z_r - Z_f)^2 + \frac{3}{4} (A - B)^2 \right) \right) = 0. \quad (40)$$

мұндағы

$$f_0 = rp_0 - pr_0, f = pq_0 + qp_0, f_1 = rq_0 + qr_0,$$

$$q = \mu \Omega_0^2 (1 + \mu_L), p = \mu e \Omega_0^2 \cos \phi,$$

$$r = n_2^2 - \Omega_0^2, q_0 = 2\mu \Omega_0 k, p_0 = \mu e \Omega_0^2 \sin \phi, r_0 = 2k_0 \Omega_0,$$

$$p_1 = \frac{\mu \omega^2 (n_2^2 - \omega^2) \left( 1 + \mu_L \frac{D_3}{D_4} \right) - 4kk_0 \omega^2}{m_1},$$

$$p_2 = - \frac{2\mu \left( \left( 1 + \mu_L \frac{D_3}{D_4} \right) \omega^2 k_0 + (n_2^2 - \omega^2) k \right) \omega}{m_1},$$

$$m_0 = n_2^2 - \Omega_0^2 + 2k_0 \Omega_0 i,$$

$$m_1 = (n_2^2 - \omega^2)^2 + 4k_0^2 \omega^2, m_2 = n_2^2 - \omega^2 + 2k_0 \omega i,$$

$$D_3 = \sigma^2 - 2\Omega_0 \sigma - \Omega_0^2, D_4 = \gamma \sigma^2 - 2\Omega_0 \sigma - \Omega_0^2.$$

Осылайша, ротордың бұрыштық жылдамдығын баяу өзгерту арқылы ротор мен фундаменттің және сұйықтықтың параметрлерін өзгерту кезіндегі жүйенің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары құрылды (14-23 суреттер).

Мәжбүрлі тербелістерге сапалық талдау жүргізу үшін қозғалыс теңдеулері өлшемсіз түрге келтіріліп, амплитудалық-жиіліктік сипаттамалар келесідей өлшемсіз шамаларға қатысты тұрғызылды

$$s = \frac{\Omega_0}{\omega}, E = \frac{e}{R}, K = \frac{k}{\Omega_0}, C = \frac{n_1 e^2}{\Omega_0^2}.$$

Ротор қуысында аз мөлшерде сұйық бар болса ( $r_0 = 0.93R$  (немесе  $\gamma = 13.8$ ), 14 және 15 суреттер), онда ротор үшін де, фундамент үшін де үш автотербелістер зонасы және үш резонанстық амплитудалар байқалады. Барлық суреттерде  $\chi = 4200 \text{ kg/s}$ ,  $\chi_0 = 6.59 \text{ kg/s}$ ,  $c_0 = 1.1 \cdot 10^7 \text{ kg/s}^2$ ,  $c_1 = 0.87 \cdot 10^7 \text{ kg/m}^2 \text{ s}^2$ ,  $c_2 = 3.26 \cdot 10^5 \text{ kg/s}^2$ ,  $M = 25 \text{ kg}$ ,  $m = 2.4 \text{ kg}$ ,  $e = 0.001 \text{ m}$  кезіндегі мысалдар келтірілген. Бұл кезде амплитудалық-жиіліктік сипаттамалар  $0 < s < 0.065$  интервалында бірінші резонанстық шыңға дейін монотонды өседі. Бірінші резонанс жиіліктің  $s = 0.065$  мәнінде орын алады, бұл кезде  $Z_r = 0.083$ ,  $Z_f = 0.0091$ . Ары қарай  $0.065 < s < 0.65$  интервалында роторда 0.028 және фундаментте 0.001 максималды автотербелістер режимі орнайды (2 және 3 суреттер).  $s = 0.65$  мәнінде ротор амплитудасы 1.72, ал фундамент амплитудасы 0.79 тең болып екінші резонансқа жетеді. Ары қарай  $0.65 < s < 1$  интервалында тербелістер амплитудасы 0.07 және 0.013 дейін монотонды кемиді. Содан кейін,  $1 < s < 1.35$  интервалында тербеліс амплитудасы айтарлықтай қарқынмен  $s = 1.35$  үшінші резонанстық шыңға дейін өседі,  $Z_r = 2.23$ ,  $Z_f = 1.38$ . Ары қарай  $1.35 < s < 3.41$  интервалында тербеліс амплитудасы  $s = 3.41$  мәніне сәйкес келетін үшінші автотербелістер зонасына дейін монотонды кемиді, бұл кезде амплитудалар  $Z_r = 0.057$ ,  $Z_f = 0.0003$  тұрақты мәндеріне ие болады, бұл ротор қуысындағы сұйық әсерінен болатын өздігінен центрлену және циркуляциялық коенсервативті емес күштердің бар болуы салдарынан орын алады. Бұл жерде автотербелістер зоналары тербелмелі қозғалысты көрсететін қисық сызық түрінде келтірілген. Барлық басқа жағдайларда автотербелістерге сәйкес келетін қисықтар аппроксимацияланған тегіс қисықтар ретінде келтірілген. Ротор қуысындағы сұйық көлемі артқан сайын ( $r_0 = 0.8R$  (немесе  $\gamma = 4.56$ ), 14 және 15 суреттер) бірінші және екінші резонанс, сондай-ақ, автотербелістердің бірінші зонасы  $\gamma = 13.8$  кезіндегідей дәл сол жиіліктерде бірақ жоғары амплитудалармен орнайтынын байқауға болады. Мысалы, бірінші резонанста, яғни  $s = 0.065$  кезінде, амплитудалар  $Z_r = 0.15$ ,  $Z_f = 0.015$ , яғни ротор қуысындағы сұйық көлемі 4.47 есе артқан кезде ротор амплитудасы 1.82 есе, ал фундамент амплитудасы 1.65 есе артады. Бұл жағдайда автотербеліс амплитудасының максималды мәні де үлкен шамаға тең болады. Мысалы, роторда 0.088, ал фундаментте 0.0097 дейін жетеді, сәйкесінше, алдыңғы жағдайға қарағанда 3.14 және 9.7 есе артық. Екінші резонанста ( $s = 0.65$ ) амплитудалар мәні  $Z_r =$



1.5,  $Z_f = 0.59$ , яғни алдыңғы жағдайдағы мәндерден айырмашылығы жоқ. Үшінші резонанстық шың бұл жағдайда ұйытқытушы күш жиілігінің өсуі бағытына қарай ығысады және  $s = 1.75$  мәніне тура келеді, бұл кезде  $Z_r = 2.36$ ,  $Z_f = 2.83$ . Ары қарай,  $s > 3.41$  кезінде амплитудалар мәндері  $Z_r = 0.139$ ,  $Z_f = 0.0006$  тұрақты мәнге ие болатын автотербелістер зонасы орнайды. Ротор қуысындағы сұйық көлемі қуыстың үштен бір бөлігін толтырған кезде ( $r_0 = 0.667R$  (немесе  $\gamma = 2.6$ ), 14 және 15 суреттер) максимальді резонанстық амплитудалар байқалады. Бірінші және екінші резонанстар, бірінші автотербелістер зонасы секілді алдыңғы жағдайлардағы мәндерде орнайды, ал амплитудалар сәйкесінше  $Z_r = 0.198$ ,  $Z_f = 0.033$  және  $Z_r = 1.9$ ,  $Z_f = 0.38$  мәндеріне ие, бірінші автотербелістер зонасы амплитудалары  $Z_r = 1.9$ ,  $Z_f = 0.38$  тең. Үшінші резонанстық шың бұл жағдайда бұрыштық жылдамдықтардың өсу бағытына қарай ығысады және  $s = 2.12$  мәнінде орнайды, амплитудалар мәні  $Z_r = 2.93$ ,  $Z_f = 2.99$  тең. Ары қарай, алдыңғы жағдайдағы секілді  $s > 3.41$  кезінде амплитудалар  $Z_r = 0.15$ ,  $Z_f = 0.0008$  тұрақты мәнге ие болатын автотербелістер зонасы орнайды. Ротор қуысы үштен біріне толған кезде максимальді амплитудалардың байқалуы қатты дене-сұйық байланысқан жүйесінің ерекшелігі болып табылады [5, 30, 69]. Ары қарай ротор қуысы  $r_0 = 0.5R$  (немесе  $\gamma = 1.67$ ),  $r_0 = 0.333R$  (немесе  $\gamma = 1.24$ ),  $r_0 = 0.125R$  (немесе  $\gamma = 1.03$ ) толған кезде бірінші және екінші резонанстар жиіліктері ( $s = 0.065$  және  $s = 0.65$ ) автотербелістер аймағының жиіліктері ( $0.065 < s < 0.65$ ,  $0.65 < s < 3.41$  және  $s > 3.41$ ) сияқты өзгермейді (14 және 15 суреттер). Бірінші және екінші резонанстық шыңдар мәндері демпферленеді, ал үшінші резонанстық шың амплитудалары бір уақытта шамасы жағынан демпферленеді және жиіліктің өсу бағытына қарай ығысады (14 және 15 суреттер), бұл ротор қуысындағы сұйық көлемінің артуына байланысты орын алады. Бұл кезде ротор қуысындағы сұйық көлемінің артуы ротор мен фундаменттің бірінші, екінші және үшінші резонанстары амплитудаларының шамасына аз әсер етеді. Жүйенің ротор қуысы бос ( $r_0 = R$ ) және толық ( $r_0 = 0$ ) болған кездегі күйі ұқсас болады. Ротор қуысы бос болған кезде ротордың да, фундаменттің де амплитудалық-жиіліктік сипаттамаларынан кубтық сызықсыздық, басқаша айтқанда Дуффинг осцилляторының сипаттамалары, және негізгі резонанс кезіндегі амплитуданың үзілуі байқалады. Бұл құбылыс амплитуда мәнінің монотонды өсіп келіп. Бұл жағдайда жиілік мәнінің ақырындап өсуі кезіндегі бос ротор амплитудасының үзілуі  $Z_r = 1.05$  және  $s = 1.33$  мәнінде орын алады, ары қарай ротор амплитудасы  $0.15$  мәніне дейін кемиді. Осыған ұқсас жағдай  $s = 1.33$  мәнінде фундаментте де байқалады, бұл кезде амплитуданың максимальді мәні  $Z_f = 0.115$  тең болады, бұл ротор амплитудасы мәнінен бірнеше есе аз. Фундамент амплитудасы үзілгеннен кейін  $0.01$  мәніне дейін кемиді. Ротор мен фундамент мәжбүр тербелісі амплитудаларының мұндай қатынасы бірінші кезекте ротор мен фундамент массаларының қатынасымен, сондай-ақ, сызықты эксцентриситет мәніне байланысты. Қарастырылып жатқан жүйенің еркіндік дәрежесі бірнеше болуына байланысты  $s = 0.065$  кезінде қосымша (бірінші) резонанс байқалады. Бұл кездегі үшінші резонанс тек сызықсыз жүйенің ерекшелігі

екенін атап өту қажет. Ротор сұйықпен толық толтырылған кезде бірінші және үшінші резонанс демпферленеді, ал негізгі (екінші) резонанс сызықтық жағдайға ұқсас болады (14 және 15 суреттер). Осылайша, ротор мен фундамент мәжбүр тербелісінің максималды амплитудалары ротор қуысы үштен біріне толтырылған кезде байқалады. Бұдан басқа ротор қуысындағы сұйық көлемінің кемуі үшінші резонанстың кіші бұрыштық жиіліктер бағытына ығысуына алып келеді.

Демпферлеу коэффициентінің кемуі ( $K = 0.01$ ) үшінші резонанстың бұрыштық жылдамдықтардың өсу бағытына қарай ығысуына алып келеді (16 және 17 суреттер). Бірінші және екінші резонанстар  $\gamma = 2.6$  және  $K = 1$  мәндеріне тура келеді, яғни  $s = 0.065$  және  $s = 0.65$  кезінде амплитудалары  $Z_r = 0.62$ ,  $Z_f = 0.33$  және  $Z_r = 0.52$ ,  $Z_f = 0.07$ .  $K = 0.01$  кезіндегі бірінші резонанс  $K = 1$  кезіндегі резонансқа тең болады. Ротор мен фундаменттің  $K = 0.01$  кезіндегі екінші резонансы  $K = 1$  кезіндегі резонанс мәнінен кем болады, сәйкесінше 6.35 және 54.28 есе. Автотербелістер зоналары саны өзгермейді, яғни біріншісі  $0.065 < s < 0.65$ , екіншісі  $0.65 < s < 3.41$  және үшіншісі  $s > 3.41$  сәйкесінше максималды амплитудалары  $Z_r = 0.43$ ,  $Z_f = 0.043$ ,  $Z_r = 0.9$ ,  $Z_f = 0.19$  және  $Z_r = 0.104$ ,  $Z_f = 0.017$ . Ығысқан үшінші резонанс  $s=3.4$  мәнінде орын алады, амплитудалары  $Z_r = 8$  және  $Z_f = 13.3$ , сәйкесінше  $K = 1$  кезіндегі ротор үшінші резонансы амплитудасынан 2.76 есе, ал фундамент амплитудасы 1.34 есе аз. Демпферлеу коэффициентің бірнеше есе арттырсақ, яғни  $K = 0.1$  кезінде автотербелістер амплитудалары демпферленеді және  $K = 1$  кезіндегі мәндеріне сәйкес келеді. Ротор мен фундаменттің резонанстық амплитудаларының шамасы артады. Бірінші, екінші және үшінші резонанстар  $K = 1$  кезіндегі шамаларында орнайды, яғни  $s = 0.065$ ,  $s = 0.65$  және  $s = 2.12$  кезінде амплитудалары  $Z_r = 0.9$ ,  $Z_f = 0.3$ ,  $Z_r = 2.9$ ,  $Z_f = 4.1$  және  $Z_r = 25.5$ ,  $Z_f = 9.1$ , бұл мәндер  $K = 1$  кезіндегі мәндеріне сәйкес келеді. Демпферлеу коэффициентін ары қарай арттыру ( $K = 5$ ,  $K = 10$  жағдайлары) автотербелістер мен резонанстық амплитудаларды айтарлықтай өшіреді, мысалы,  $K = 5$  кезінде бірінші, екінші және үшінші резонанстар амплитудалары  $Z_r = 0.02$ ,  $Z_f = 0.003$ ,  $Z_r = 1.15$ ,  $Z_f = 0.4$  және  $Z_r = 1.7$ ,  $Z_f = 3.6$  тең. Ал  $K = 10$  мәнінде бірінші, екінші және үшінші резонанстар амплитудалары  $Z_r = 0.02$ ,  $Z_f = 0.003$ ,  $Z_r = 0.66$ ,  $Z_f = 0.1$  және  $Z_r = 1.1$ ,  $Z_f = 2.5$  тең. Осылайша, демпферлеу коэффициентін арттыру мәжбүр тербелістер амплитудаларын өшіруге алып келеді. Бұдан басқа, демпферлеу коэффициентін берілген мәнінен екі есе кеміту тербелістерді қарқынды өшіреді, сондай-ақ, үшінші резонанстың бұрыштық жылдамдықтардың өсу бағытына қарай ығысуы байқалады, яғни ротор қуысы үштен біріне толтырылған кездегі үшінші резонанс ротор қуысы бос болған кездегі мәнде байқалады ( $s = 3.4$ ), бұл сызықсыз жүйенің ерекшелігі болып табылады.

Фундамент массасының автотербелістер мен резонанстық амплитудаларға  $\gamma = 2.6$  кезіндегі әсерін бағалау үшін ротор мен фундаменттің әртүрлі массалары  $\mu = 0.96$ ,  $\mu = 0.192$ ,  $\mu = 0.096$ ,  $\mu = 0.048$  және  $\mu = 0.0096$  қарастырылып және амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары құрылды (18 және 19 суреттер). Жоғарыда келтірілген барлық жағдайларда бірінші, екінші

және үшінші резонанстар  $s = 0.065$ ,  $s = 0.65$  және  $s = 2.12$  мәндерінде байқалды. Фундамент массасы өскен сайын ( $\mu = 0.096$ ,  $\mu = 0.048$ ) үшінші резонанс кезінде ротор амплитудасының ( $s = 2.12 : Z_r = 5.6$ ,  $Z_r = 7.53$ ) және автотербелістердің өсуі байқалды, ал бұл кезде фундаменттің резонанстық амплитудалары мен автотербелістер амплитудалары шама жағынан кеміді. Фундамент массасы ротор массасынан аз шамаға артық болған кезде ( $\mu = 0.192$  және  $\mu = 0.96$ ) ротордың да, фундаменттің де үшінші резонансының минимальді амплитудалары байқалды ( $Z_r = 1.94$  және  $Z_f = 3.39$ ,  $Z_r = 0.34$  және  $Z_f = 1.01$ ).  $\mu = 0.96$  кезінде  $0.65 < s < 2.125$  интервалында фундамент амплитудасының  $0.28$  максимальді мәні байқалатын қарқынды автотербелістер зонасы орнайды (17 сурет). Фундамент массасының кемуі кезіндегі ротор амплитудаларының өшуі сызықсыз жүйенің ерекшелігі болып табылады. Сызықты жағдайда ротор амплитудаларының кемуі фундамент массасы артқан кезде байқалады, өйткені бұл жағдайда анти-жүк рөлін фундамент атқарады.

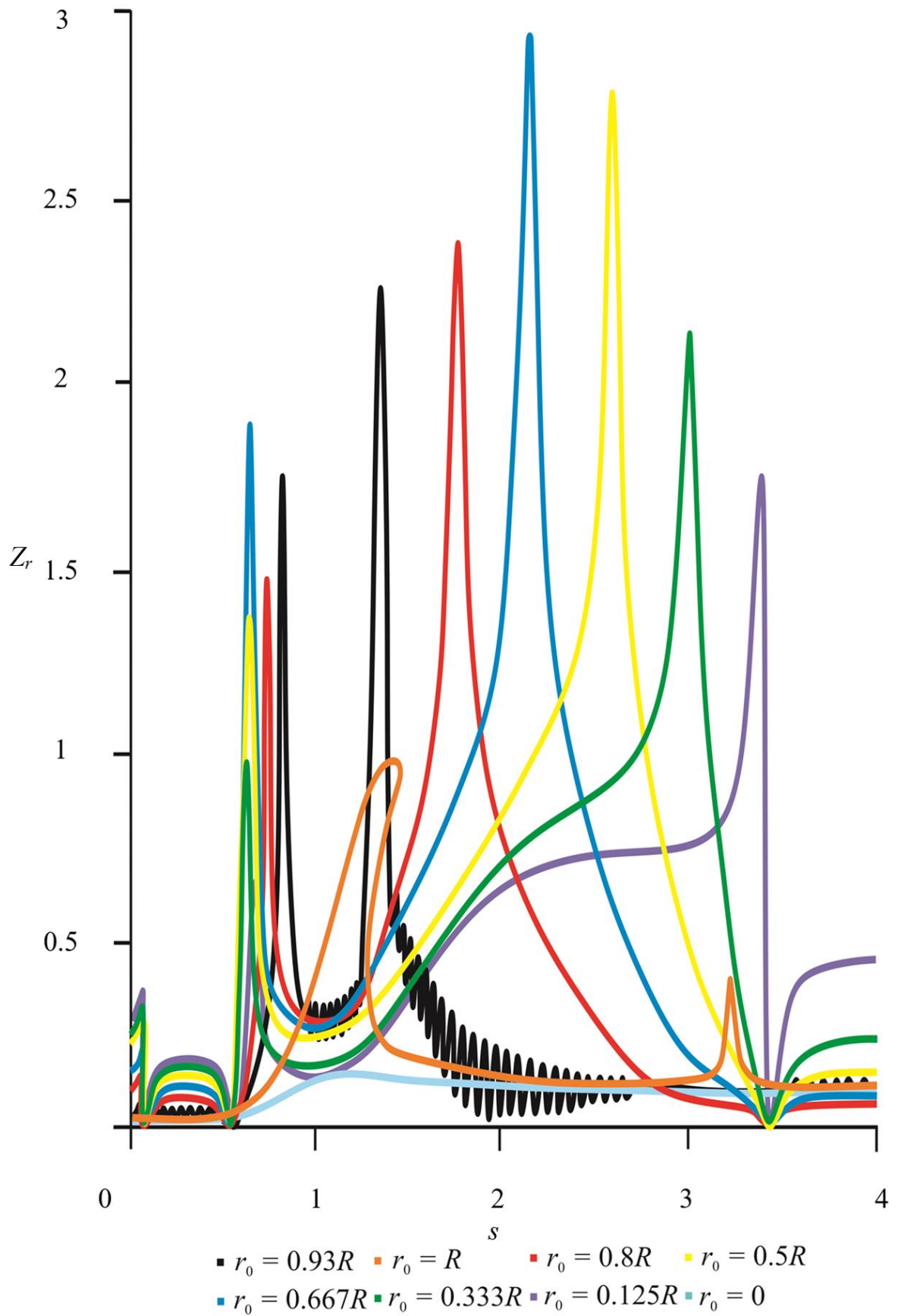
Қалпына келтіруші күштің сызықсыздығы әсерінен пайда болатын бейсызық эффектілер әсерін зерттеу мақсатында кубтық мүшедегі әртүрлі қатаңдық коэффициент мәндері  $C = 0.01$ ,  $C = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $C = 10$  және  $C = 100$ , қарастырылды және әрбір жағдай үшін  $\gamma = 2.6$ , яғни ротор қуысы үштен біріне толтырылған кездегі амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары құрылды (20 және 21 суреттер). Кубтық мүшедегі қатаңдық коэффициенттерінің мәнін арттыру ротор мен фундаменттің резонанстық амплитудаларын, сондай-ақ, автотербелістер амплитудаларының кемуіне алып келеді. Максимальді амплитудалар мәндері  $C = 0.01$  кезінде байқалады:  $s = 0.065$  кезіндегі бірінші резонанстық амплитудалар  $Z_r = 1.86$  және  $Z_f = 0.15$ ,  $s = 0.65$  кезіндегі екінші резонанстық амплитудалар  $Z_r = 19.215$  және  $Z_f = 3.84$  және  $s = 2.125$  кезіндегі үшінші резонанстық амплитудалар  $Z_r = 23.47$  және  $Z_f = 14.09$  тең. Сәйкесінше минимальді амплитудалар мәндері  $C = 100$  кезінде байқалады, яғни  $s = 0.065$  кезіндегі бірінші резонанстық амплитудалар  $Z_r = 0.03$  және  $Z_f = 0.01$ ,  $s = 0.65$  кезіндегі екінші резонанстық амплитудалар  $Z_r = 0.07$  и  $Z_f = 0.37$  және  $s = 2.125$  кезіндегі үшінші резонанстық амплитудалар  $Z_r = 0.31$  және  $Z_f = 0.83$  тең, яғни қатаңдық коэффициентінің мәнін екі дәрежеге арттырғанда ротор мен фундаменттің резонанстық амплитудалары  $s = 0.065$  кезінде  $54.78$  және  $15$  есе,  $s = 0.65$  кезінде  $266.87$  және  $10.37$  есе,  $s = 2.125$  кезінде  $76.21$  және  $16.97$  есе кемиді. Қатаңдық коэффициенттерін өзгерткен кезде резонанстық жиіліктер мен автотербелістер зонасының ығысуы байқалмайды. Бұл жағдайда сызықты жағдайлардағы сияқты қатаңдықты арттыру барлық тербелістердің өшуіне алып келеді. Қатаңдық мәндерін ары қарай арттырудың берілген техникалық есеп аясында ешқандай мәні жоқ.

Құрал-жабдықтардың жетілмегендігі және жоғары жылдамдықтардағы басқа да факторлардың бар болуына байланысты  $e$  – дисбаланс тәрізді шама мәндерінің қауіпсіз және оптимальді жұмыс үдерісін қамтамасыз ететін жиіліктер диапазонын анықтау маңызды және оның жүйе күйіне әсерін анықтау қажет. Бұл жұмыста  $E = 0.5$ ,  $E = 1$ ,  $E = 5$  және  $E = 10$  жағдайлары қарастырылды және әрбір жағдай үшін сәйкес амплитудалық-жиіліктік

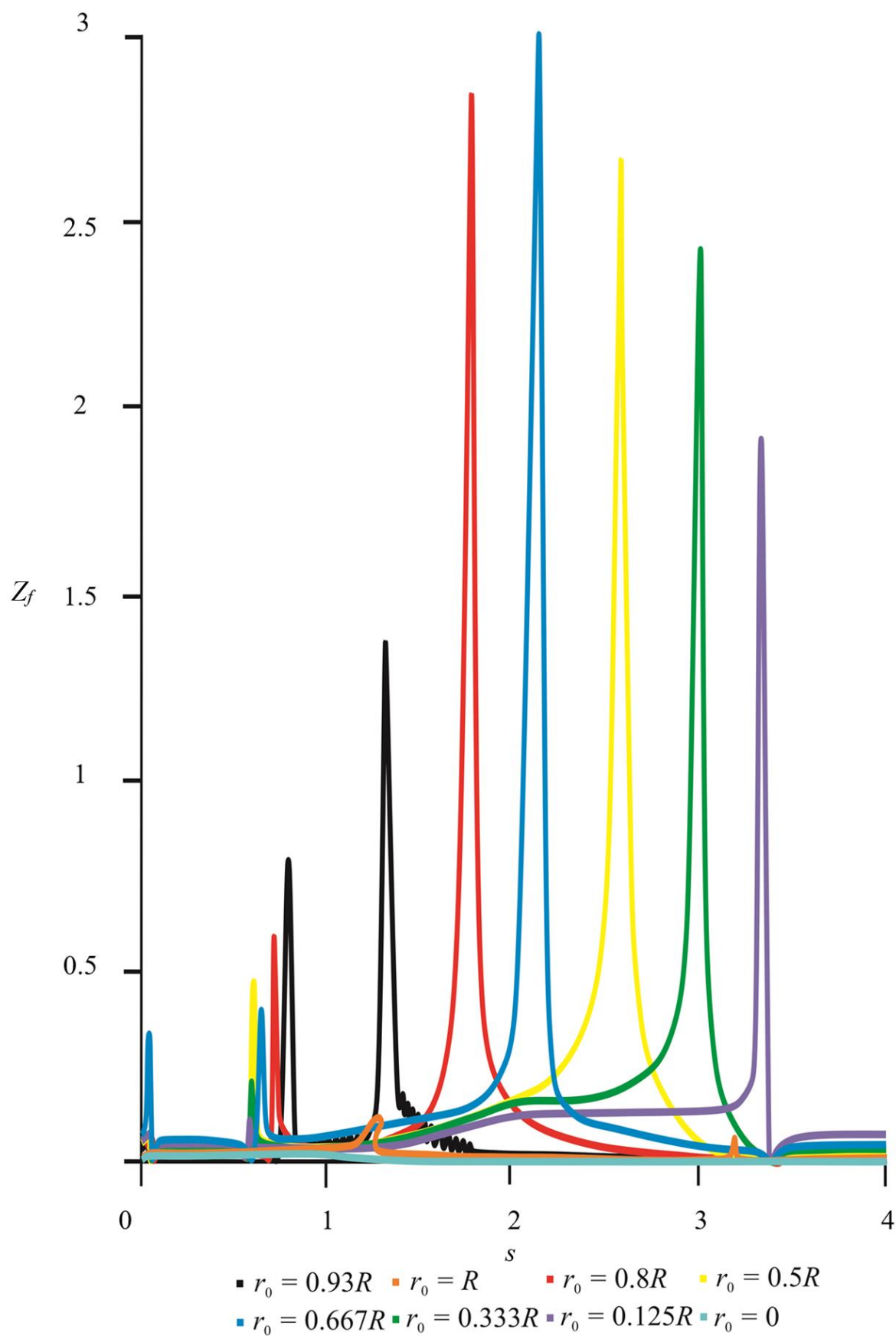
сипаттамалары құрылды (22 және 23 суреттер).  $E = 0.5$ ,  $E = 1$  және  $E = 5$  кезінде алдыңғы жағдайлардағыдай  $s = 0.065$ ,  $s = 0.65$  және  $s = 2.125$  мәндерінде үш резонанстық амплитудалар байқалды. Бұл жағдайда дисбаланс шамасының өзгеруі резонанстық амплитудалар мен автотербелістер амплитудаларына іс жүзінде еш әсер етпейді. Дисбаланс мәнінің  $E = 0.1$  шамасына дейін кемуі кезінде ротор мен фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары ротор қуысы сұйықпен толық толтырылған кездегі сипаттамалармен толықтай ұқсас болады. Бұл кезде максималды амплитудалар мәні  $Z_r = 0.014$  және  $Z_f = 0.001$  тең, бұл  $E = 1$  кезіндегі ротор қуысы толық толтырылған жағдайдан (14 және 15 суреттер) 10 есе аз. Дисбаланс мәнін бір дәрежеге арттырғанда, яғни  $E = 10$  кезінде ротор мен фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары қатаң типті сызықсыздыққа келеді. Осылайша, дисбаланс өскен кездегі мәжбүр тербелістердегі сұйық әсерінен болатын автотербелістердің өшуі байқалады. Бұл кезде амплитуданың үзілуі жоғары жиіліктер бағытына қарай ығысады. Ары қарай үзілуден кейін өздігінен центрлену эффекті әсерінен жүйенің жұмысы тұрақтанады және тербеліс автотербелістер амплитудасынан сәл жоғары  $Z_r = 1.26$  амплитудамен жалғасады. Ротор тербелісі кезінде  $0 < s < 0.346$  интервалында максималды амплитуда  $Z_r = 0.08$  тең бір автотербелістер зонасы байқалады. Фундамент тербелісі кезінде  $Z_f = 0.09$  дейін жететін  $s = 0.112$  дейін амплитуданың кенет өсуі орын алады. Ары қарай жиілік өскен сайын амплитуда үзілуіне дейін жалғасатын фундамент амплитудасының өсуі байқалады, ары қарай ротордағы секілді, амплитудасы  $Z_f = 0.03$  тең болатын тұрақты тербеліс орнайды. Екі жағдайда да роторда да, фундаментте де амплитудалардың үзілуі  $s = 2.817$  мәнінде орын алады.

Бейсызықты жүйелер, ( $s = 1$ ) негізгі резонанстың жиілігіне еселі қосымша ультра гармоникалық ( $s = 3$ ) және субгармоникалық резонанстар ( $s = 0.5$  және  $s = 0.333$ ) бар болуымен ерекшеленеді. Оларды анықтау үшін берілген жұмыста (13)-жүйеге сәйкес сызықты жүйенің АЖС-сы (24 және 25 суреттер, қара қисық) мен қуысы бос бейсызық жүйенің сандық және аналитикалық әдіспен алынған АЖС-сымен салыстырылды (24 және 25 суреттер, қызыл, күлгін көк пунктир қисықтар). Негізгі резонанстың оң жағындағы резонанс сызықты жағдайда орын алмайтынына және негізгі резонанстың жиілігіне үш еселі болуына байланысты ультрагармоника екені анықталды. Ал негізгі резонанстың сол жағында орналасқан резонанс сызықты жағдайда да бар болуына байланысты фундаменттің қозғалуын ескеру себепті орын алатыны анықталды.

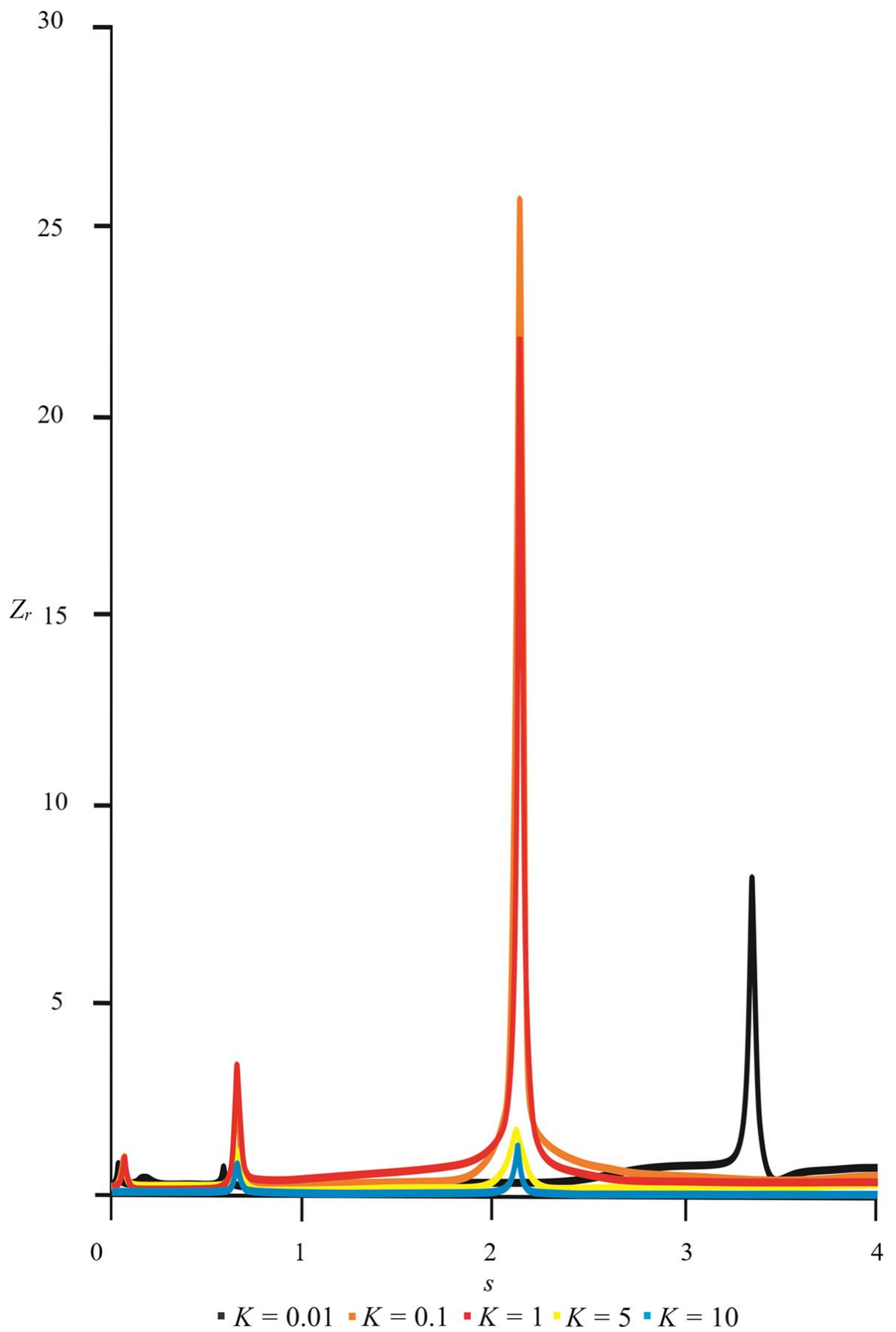
Берілген параметрлерде ротор қондырғысын әзірлеу үшін фундамент массасының оптималды мәні ретінде, яғни амплитудалар шамасы ең аз болатын жағдай ротор массасының 1.042-ге дейінгі мәні, өлшемсіз сызықтық эксцентриситет  $E = 10$ -нан аспайтын жағдай болып табылады. Сонымен қатар бейсызықтық коэффициентін сызықты қатаңдық коэффициентіне қатысты бес есе ұлғайту және демпферлеу коэффициентін екі есе азайту ұсынылады, бұл болса өз кезегінде төмен амплитуда мен ультра гармоникалық резонанстың жоғары жиіліктерге ауысуын қамтамасыз етеді.



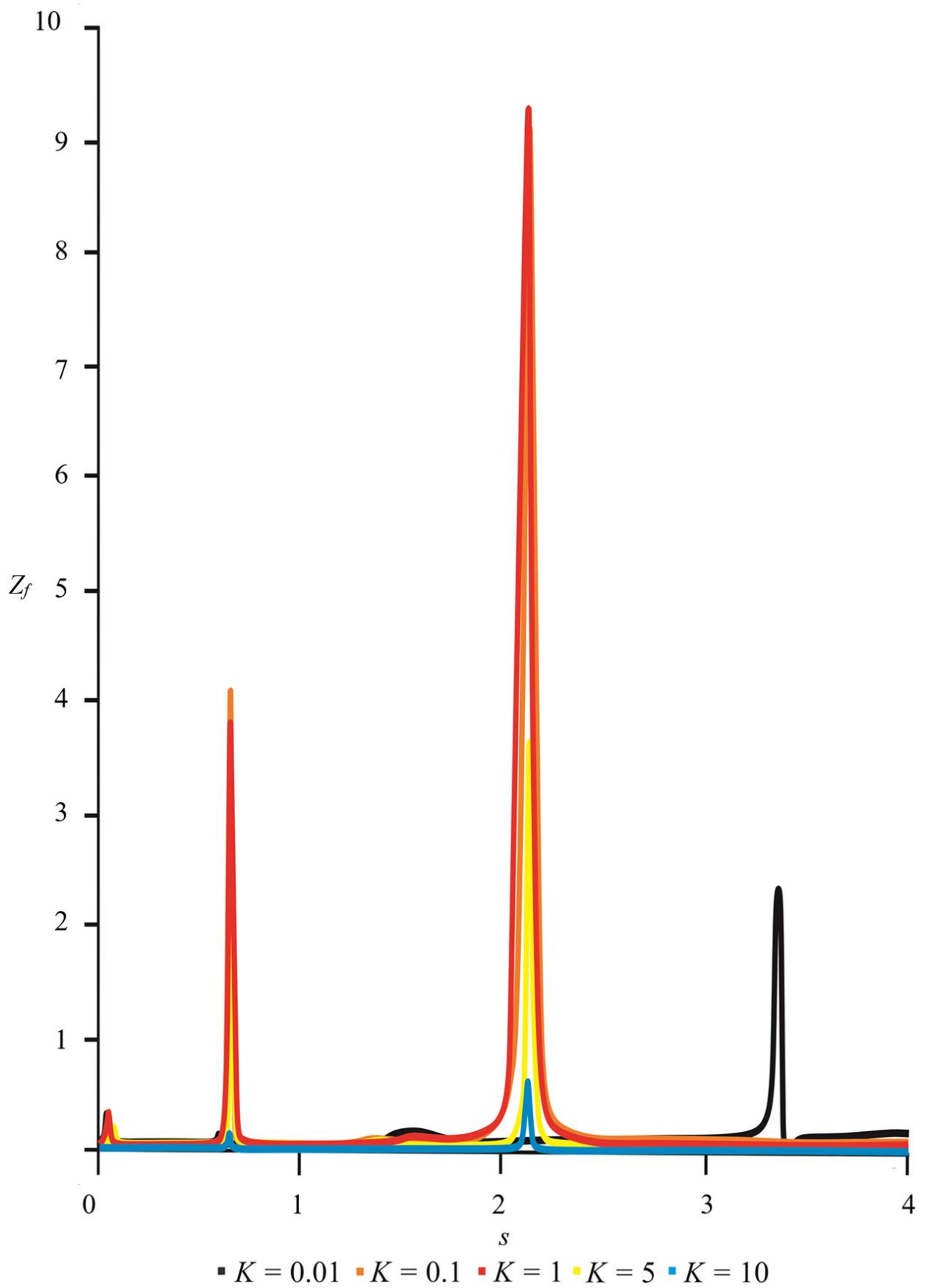
Сурет 14 –  $r_0$  – ротор қуысы сұйықтықпен әр түрлі дәрежеде толтырылуы кезіндегі  $Z_r$  – ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



Сурет 15 –  $r_0$  – ротор қуысы сұйықтықпен әр түрлі дәрежеде толтырылуы кезіндегі  $Z_f$  – фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.

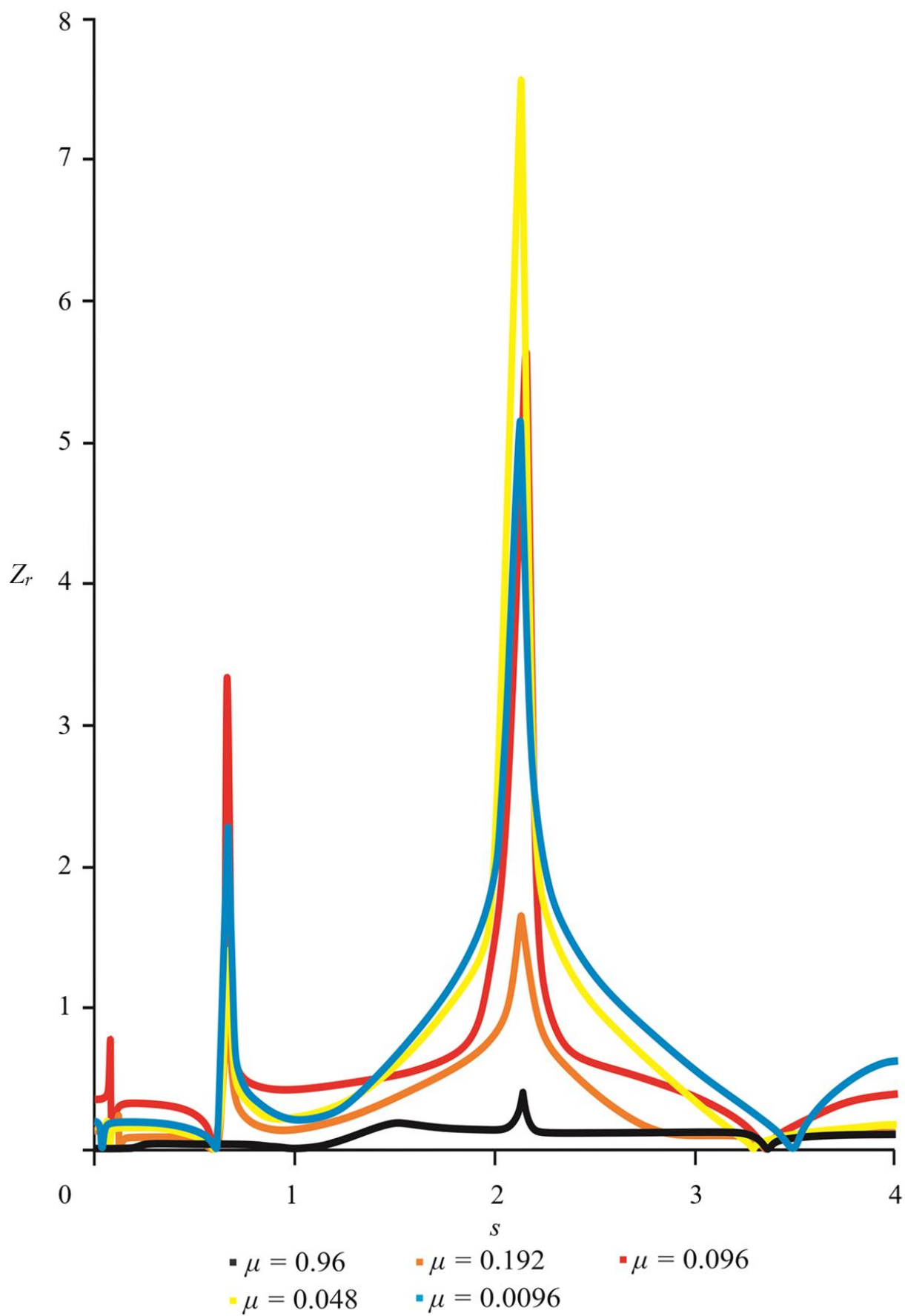


Сурет 16 –  $K$  – демпферлеу коэффициентінің әр түрлі мәніндегі  $Z_r$  – ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.

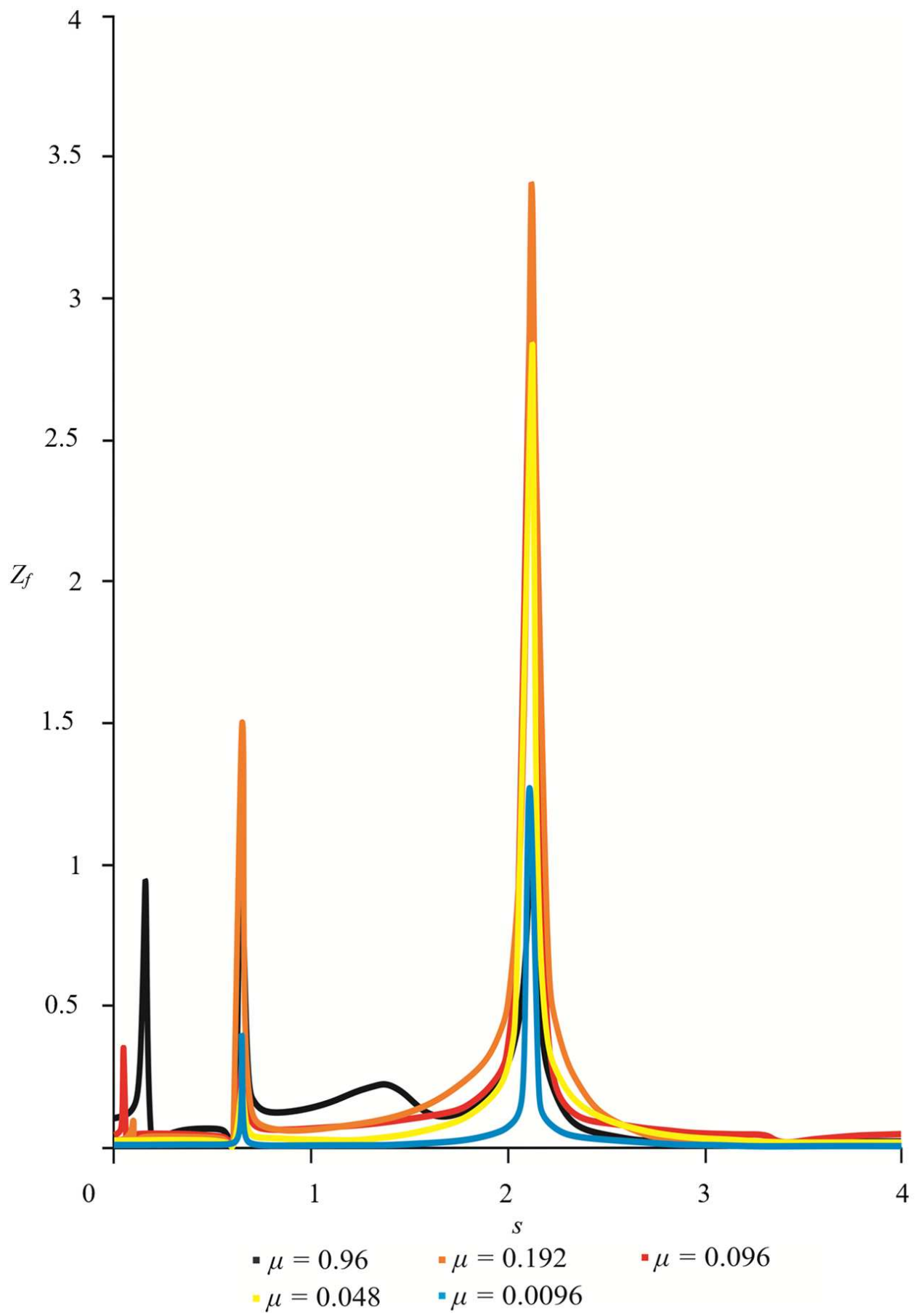


Сурет 17 –  $K$  – демпферлеу коэффициентінің әр түрлі мәніндегі  $Z_f$  – фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.

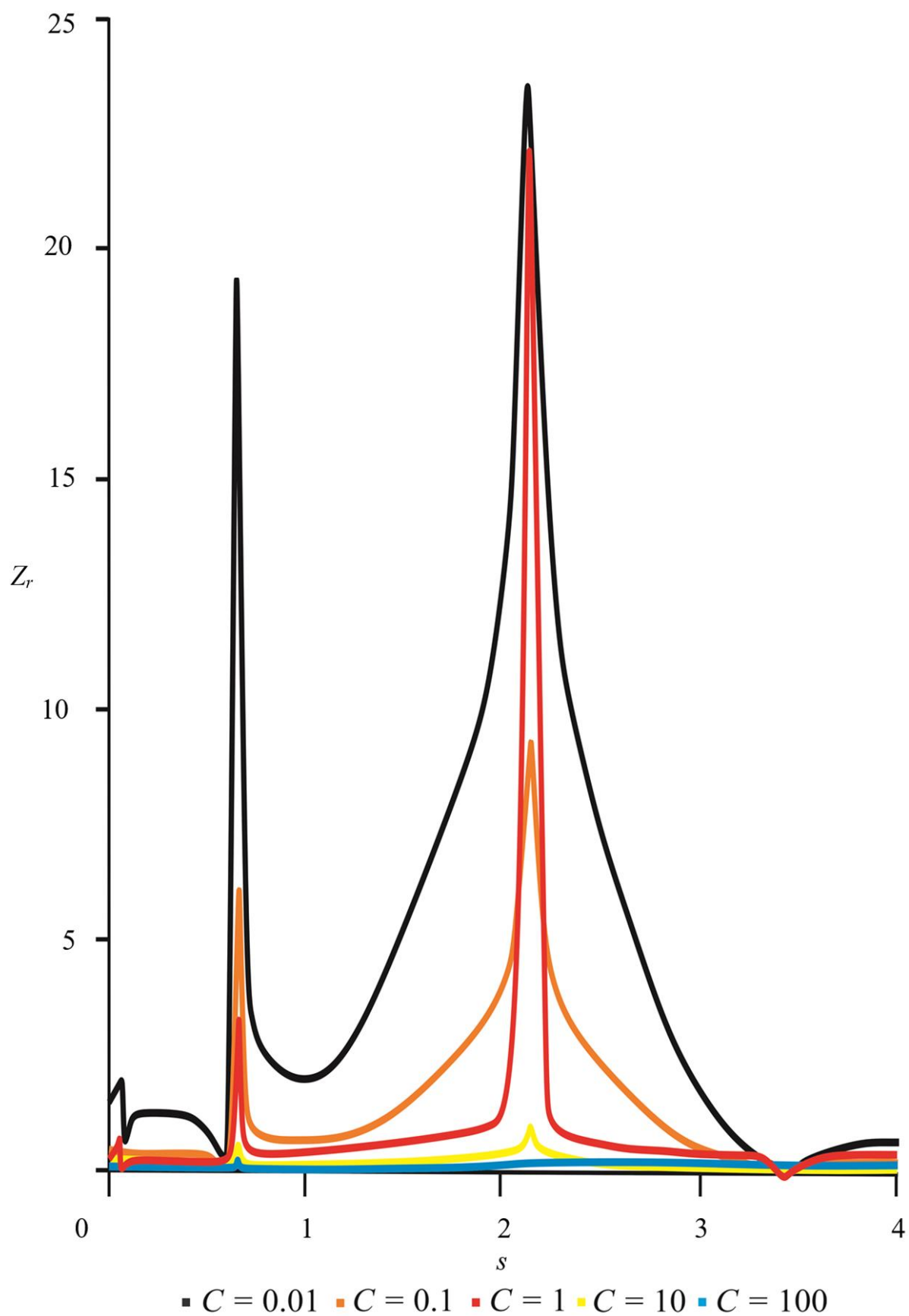




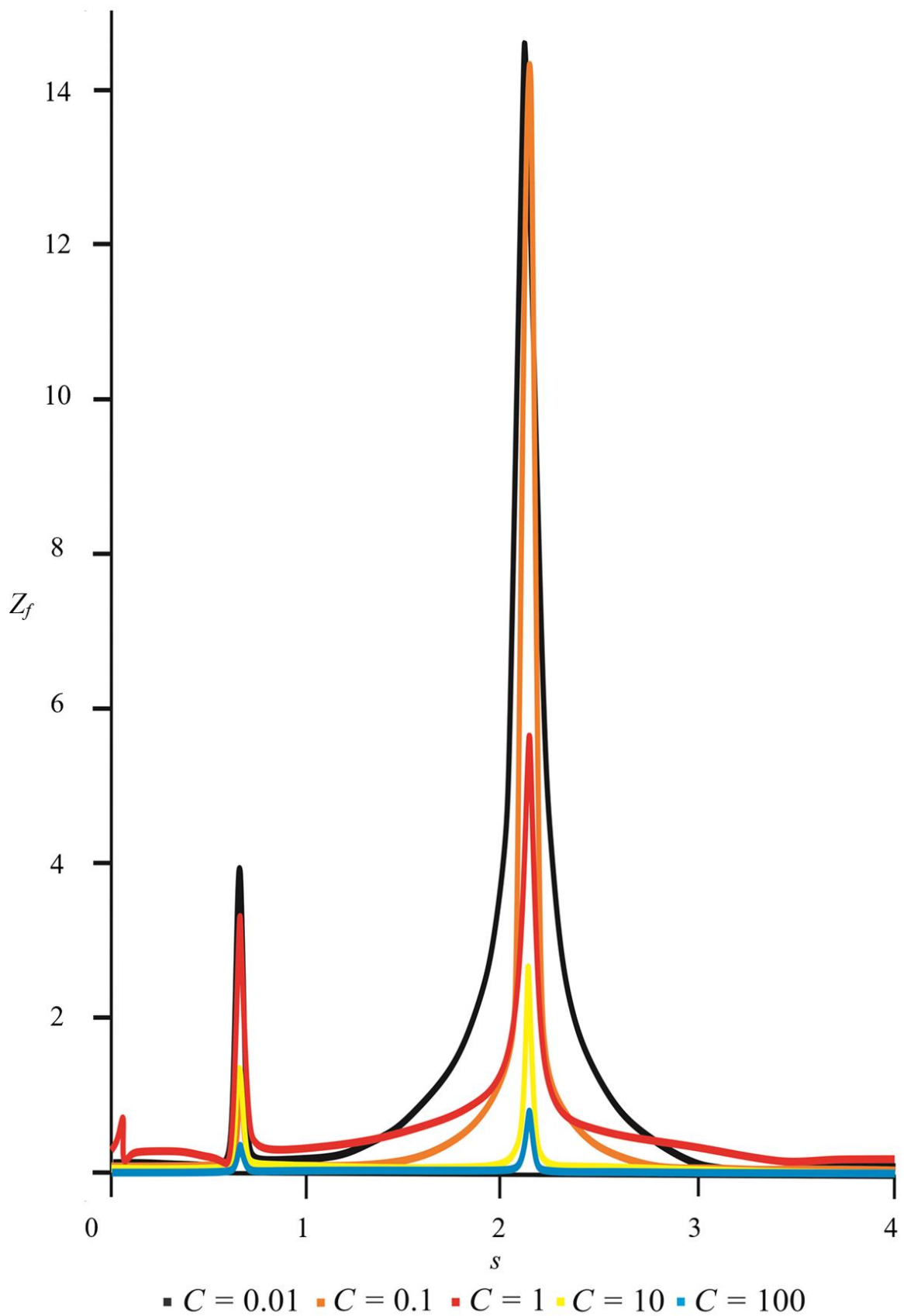
Сурет 18 –  $\mu$  – массалар қатынасының әр түрлі мәніндегі  $Z_r$  – ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



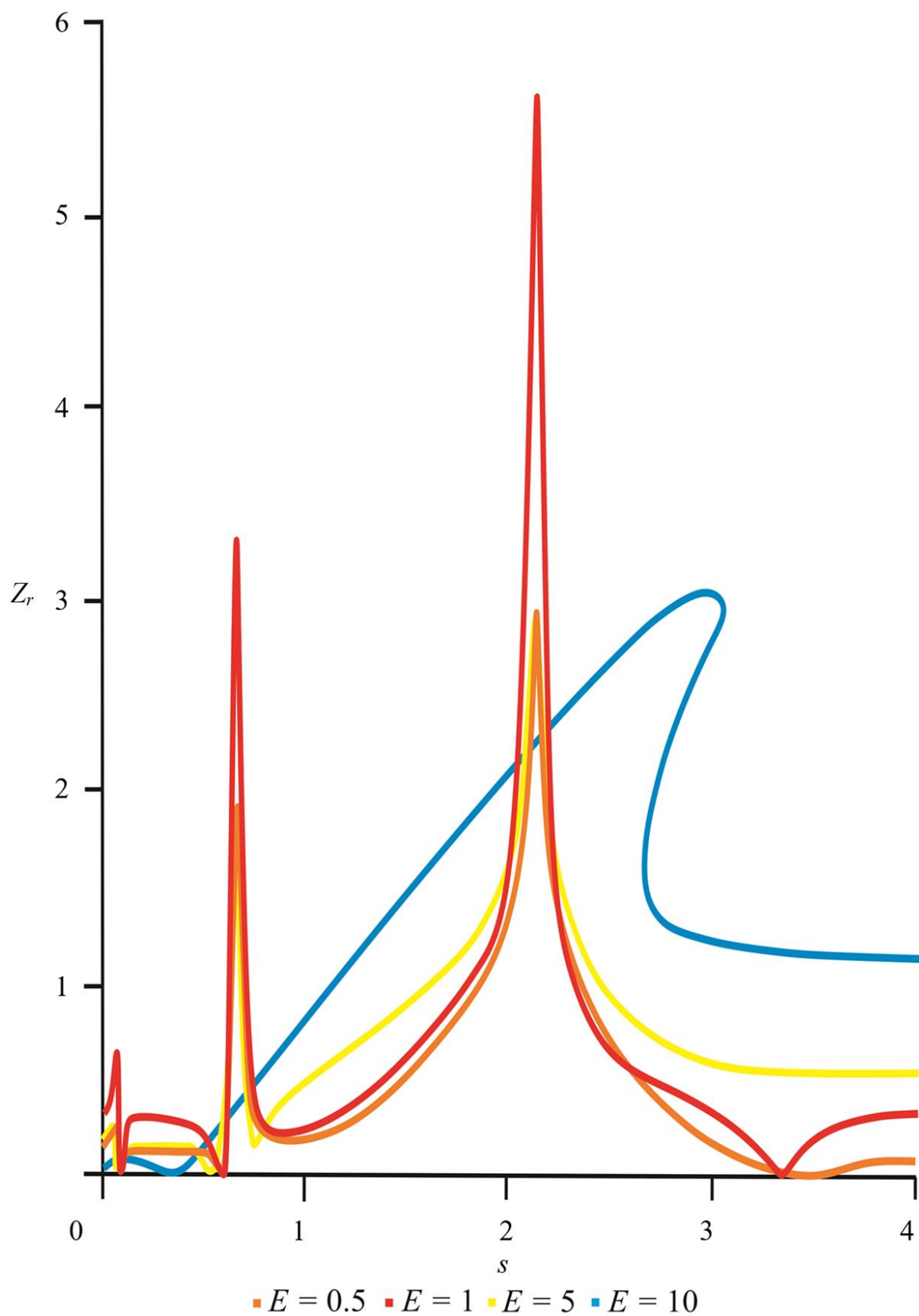
Сурет 19 –  $\mu$  – массалар қатынасының әр түрлі мәніндегі  $Z_f$  – фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



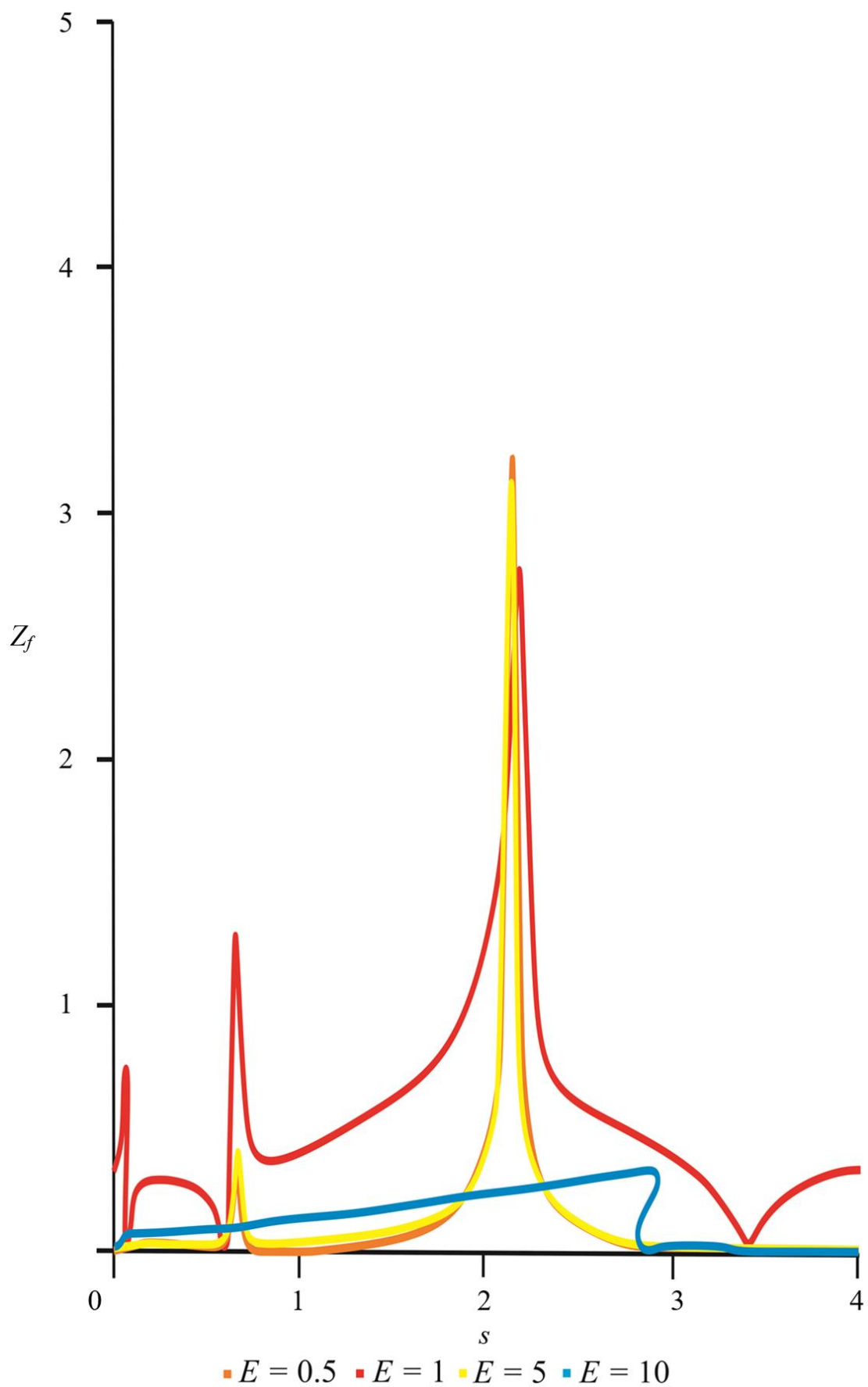
Сурет 20 –  $C$  – бейсызық қатаңдық коэффициентінің әр түрлі мәніндегі  $Z_r$  – ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



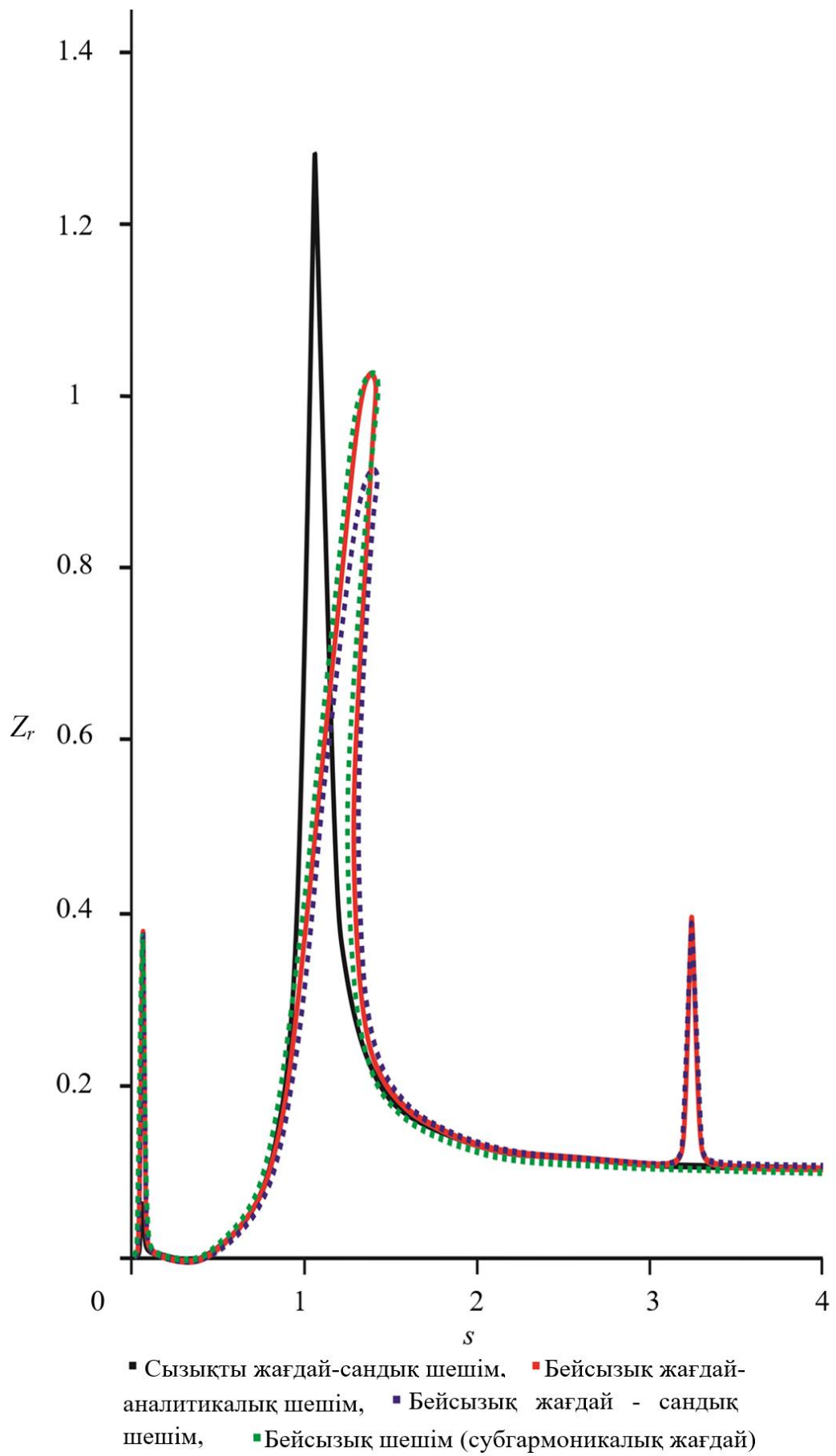
Сурет 21 –  $C$  – бейсызық қатандық коэффициентінің әр түрлі мәніндегі  $Z_f$  – фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



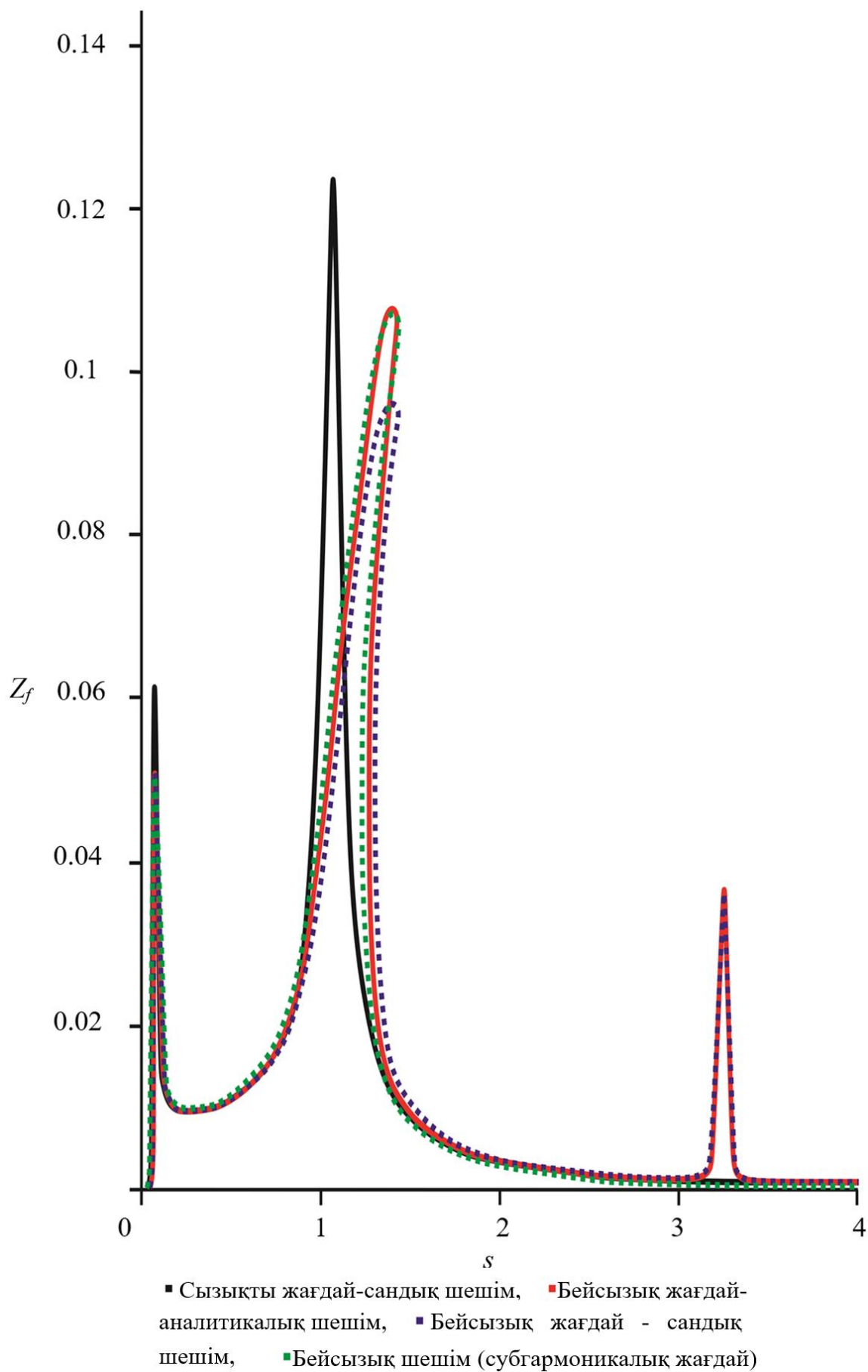
Сурет 22 –  $E$  – теңгерімсіздіктің әр түрлі мәніндегі  $Z_r$  – ротордың амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



Сурет 23 –  $E$  – теңгерімсіздіктің әр түрлі мәніндегі  $Z_f$  – фундаменттің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



Сурет 24 –  $Z_r$  – ротордың сызқты және бейсызық жағдайдағы амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



Сурет 25 –  $Z_f$  – фундаменттің сызықты және бейсызық жағдайдағы амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары.



Ротордың қуысы сұйықтықпен қандай да бір мөлшерде толтырылған жағдайда жүйенің тұрақты жұмысы үшін жүйенің жұмыс жылдамдығы  $0.065 < s < 0.65$  аралығында немесе  $s > 3.41$  облысында болуы шарт. Алынған нәтижелердің ЭЕМ-да есептеу алгоритмі Б қосымшасында келтірілген.

#### 1.4 Өздігінен центрлену құбылысы

Өздігінен центрлену құбылысын зерттеу үшін ротордың  $\Omega_0$  бұрыштық жылдамдығы шексіз өскендегі  $Z_r$  және  $Z_f$  амплитудаларының (37)-(40) теңдеулері арқылы шектік шамалары анықталады. Демек  $\Omega_0 \rightarrow \infty$  кезінде:

$$\lim_{\Omega_0 \rightarrow \infty} Z_r = \mp e,$$

$$\lim_{\Omega_0 \rightarrow \infty} Z_f = -(a_1 \pm e)\mu = 0.$$

Тура прецессия кезінде

$$\lim_{\Omega_0 \rightarrow \infty} a_1 = -e, \quad \lim_{\Omega_0 \rightarrow \infty} b_1 = 0.$$

Демек ротордың бұрыштық жылдамдығы шексіз өскен уақытта статикалық орнықпағандылық векторы  $O$  нүктесіне қарай бағытталып, ротордың айналу осын  $Oz$  вертикаль координат осымен беттестіруге яғни ротордың статикалық орнықпағандылығын жоюға бағытталады.

Ротор мен фундамент (мойынтіректер) арасындағы қысымды анықтау үшін, роторды «алып тастап», оның фундаментке деген әсерін сәйкес реакциялармен алмастыруға болады. Ротор симметриялы болғандықтан ротор мойынтірегінің біреуі үшін ғана реакцияларды тапсақ жеткілікті. Тіректің әрбір мойынтірегі бірдей реакцияларға ие болуы себепті, ротор жазық параллель қозғалыс жасайды, бұл жағдайда фундаменттің қозғалыс теңдеуі

$$M\ddot{z}_2 + 2c_2 z_2 = 2R_1,$$

немесе

$$R_1 = \frac{(2c_2 - M\Omega_0^2)Z_f}{2}$$

болады.

Осыдан, егер ротордың бұрыштық жылдамдығы мен серпімді тіректер өрісінің эквивалентті қатаңдық коэффициенттері және фундаменттің массасы арасында

$$M = \frac{2c_2}{\Omega_0^2},$$

қатынасы орын алса, онда ротор мен фундамент арасындағы радиалды қысым нөлге тең екені шығады. Демек, егер жұмыс жасайтын жылдамдық тұрақты болса, берілген айналу жиілігіндегі ротор мен мойынтіректер арасындағы қысым нөлге тең болатын жағдайы үшін серпімді тіректер өрісінің қатаңдық коэффициенттерін табуға болады.

Тіректерге түсетін қысымды анықтау үшін, фундаментті «алып тастап» оның деген тіректерге әсерін реакциялармен алмастырамыз. Онда тіректерге деген фундаменттің реакциясы, басқаша айтқанда фундамент пен оның тіректерінің арасындағы қысым:

$$R_2 = c_2 Z_f,$$

мұндағы  $Z_f$  фундаменттің тербелу амплитудасы. Демек, осылайша тіректерге түсетін қысым ротордың бұрыштық жылдамдығы  $\Omega_0$  шексіз өскен жағдайда, яғни роторлық жүйенің өздігінен центрлену құбылысы орын алған кезде нөлге тең болады.

### 1.5 Қорытынды

Дереккөздер мен әдебиеттерді талдау барысында алынған нәтижелер келесідей қорытындылар жасауға мүмкіндік береді. Бұл жұмыста алғаш рет

– Сипаттамалары бейсызықты домалау мойынтіректеріндегі «ротор-сұйықтық-фундамент» жүйесінің меншікті және мәжбүрлі тербелістерінің амплитудаларын есептеу және жиіліктік сипаттамаларын тұрғызу әдістемесі жасалды.

– Сұйықтық көлемінің кез-келген нүктесі үшін сұйықтық бөлшегі жылдамдығының компоненттері және қысым функциясы, сондай-ақ сұйықтықтың реакция күші үшін өрнектер анықталды.

– Көптеген еркіндік дәрежесі бар жүйенің ерекшеліктері көрсетіліп, сонымен қатар бейсызықты жүйелерге тән суб- және ультрагармоникалық тербелістер зерттелген.

– Амплитудалардың оптимальді мәндерін қамтамасыз ететін теңгерімсіздік, фундаменттың массасы, ротор қуысындағы сұйықтық мөлшері, қатаңдық және демпферлеу коэффициенттерінің шамалары анықталды.

## 2 ДОМАЛАУ МОЙЫНТІРЕКТЕРІНДЕГІ «РОТОР – ФУНДАМЕНТ» ЖҮЙЕСІНІҢ БЕЙСЫЗЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРІ

Бұл бағыттың дамуына кең үлес қосқан ғалымдар ретінде Пуанкаре, Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Н. Г. Бондарь, В. О. Кононенко, Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, С. П. Кузнецов, И. И. Блехман, К. М. Рагульскис, Л. И. Мандельштам, А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, В. М. Старжинский, С. П. Тимошенко, К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин, П. С. Ланданы, шетелдіктерден Ch. Hayashi, A. A. Tondl, G. Schmidt, D. G. Fertis, K. Magnus, F. Moon, A. Nayfeh, M. Rozo, J. Stoker, L. Cveticanin, I. Kovacic атап өтуге болады.

Жоғарыда аталған және қалған авторлардың еңбектерінің көпшілігі еркіндік дәрежесі бір болып табылатын бейсызық теңдеудің жуық шешімін табу әдістерін жасауға және амплитуда-жиіліктік сипаттамаларын тұрғызуға арналған.

Бұл жұмыста тіректердің бейсызық болуы, фундаменттің тербелісі, ротордың статикалық теңгерімсіздігі, үйкеліс күштері сияқты факторларды ескере отырып, жүйенің кинематикалық және динамикалық сипаттамаларын дәл есептеуге мүмкіндік беретін Якобидің эллиптикалық функциялары қолданылатын жоғары дәлдікті аналитикалық әдістер негізінде Дуффинг типті бейсызық теңдеуді шешу әдісі жасалды.

### 2.1 Есептің қойылымы мен жүйенің қозғалыс теңдеулері

Вертикаль роторлық жүйені қарастырайық. Серпімді тіректердегі демпферленген фундамент горизонталь жазықтықта қозғалыс жасайды. Ротор статикалық теңгерімсіздікке ие. Ротор жазық параллель қозғалыс жасайды, және координаталық осьтер төңірегінде айналу орын алмайды. Ротор мен фундаменттің қозғалысы қозғалмайтын  $Ox$  координата жүйесіне қатысты қарастырылады. Мойынтіректің бейсызық қалпына келтіруші күші Герц контакт теориясына сәйкес сипатталады. Жүйенің қозғалыс теңдеуі (41) түрінде болады

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c_0(x_1 - x_2) + c_1(x_1 - x_2)^3 + \chi\dot{x}_1 &= me\Omega_0^2 \cos\Omega_0 t, \\ m\ddot{y}_1 + c_0(y_1 - y_2) + c_1(y_1 - y_2)^3 + \chi\dot{y}_1 &= me\Omega_0^2 \sin\Omega_0 t, \\ M\ddot{x}_2 + c_2x_2 - c_0(x_1 - x_2) - c_1(x_1 - x_2)^3 + \chi_0\dot{x}_2 &= 0, \\ M\ddot{y}_2 + c_2y_2 - c_0(y_1 - y_2) - c_1(y_1 - y_2)^3 + \chi_0\dot{y}_2 &= 0, \\ x_1(0) = e, x_2(0) = 0.1 \cdot e, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, \\ \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0, \dot{y}_1(0) = 0, \dot{y}_2(0) = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

(41)-теңдеулер жүйесі теңгерімсіз, бейсызық тіректердегі ротор мен фундаменттің қозғалысын сипаттайды. Фундаменттің қозғалысын ескермеген

жағдайда (41) теңдеулер жүйесі екі қозғалыс теңдеуінен тұрады, бұл жағдай толығырақ [28, 61-б] жұмысында зерттелген.

(41)-теңдеулер жүйесін (42) түріндегі өлшемсіз теңдеулер жүйесіне келтірейік, яғни

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + 2\zeta_1 \dot{f}_1 + (f_1 - f_2) + \varepsilon(f_1 - f_2)^3 &= \eta^2 \cos(\eta\tau), \\ \ddot{v}_1 + 2\zeta_1 \dot{v}_1 + (v_1 - v_2) + \varepsilon(v_1 - v_2)^3 &= \eta^2 \sin(\eta\tau), \\ \ddot{f}_2 + 2\mu\zeta_2 \dot{f}_2 - \mu(f_1 - f_2) - \mu\varepsilon(f_1 - f_2)^3 + \mu\lambda f_2 &= 0, \\ \ddot{v}_2 + 2\mu\zeta_2 \dot{v}_2 - \mu(v_1 - v_2) - \mu\varepsilon(v_1 - v_2)^3 + \mu\lambda v_2 &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} x_1 = ef_1, x_2 = ef_2, y_1 = ev_1, y_2 = ev_2, \\ \mu = \frac{m}{M}, \omega_1^2 = \frac{c_0}{m}, \omega_2^2 = \frac{c_2}{m}, \tau = \omega_1 t, \Omega_0 = \omega_1 \eta, \\ \zeta_1 = \frac{\chi}{2m\omega_1}, \zeta_2 = \frac{\chi_0}{2m\omega_1}, \varepsilon = \frac{c_1 e^2}{m\omega_1^2}, \lambda = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}. \end{aligned}$$

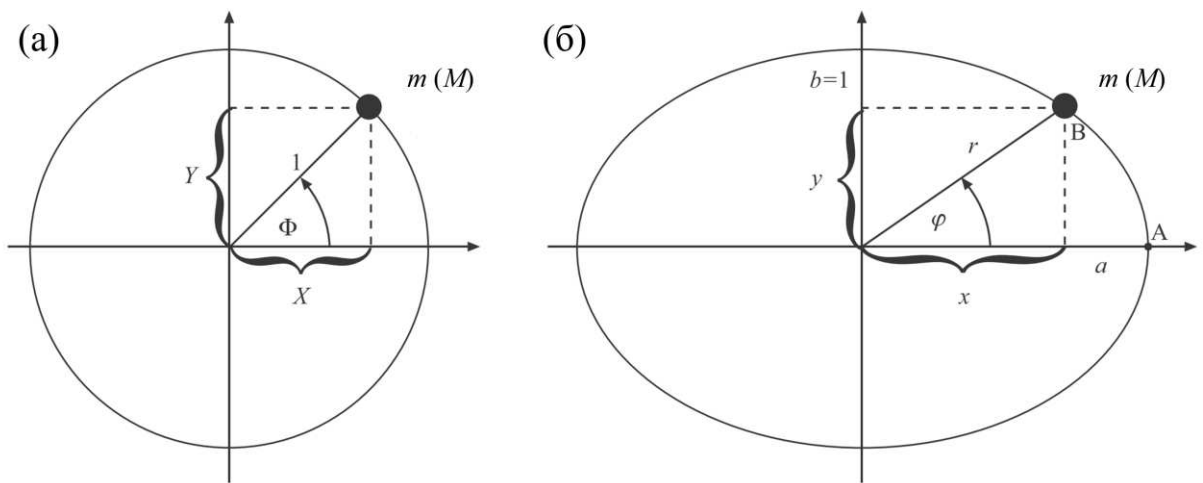
Жүйенің меншікті және мәжбүрлі тербелістерінің амплитудасы мен жиіліктерін дәлірек анықтау мақсатында Якобидің эллиптикалық функцияларын қолданайық. Бұл жағдайда (42)-теңдеудің бірінші және үшінші теңдеуі, екінші және төртінші теңдеулермен байланыспағанын, сонымен қатар ұйытқушы күш  $\cos(\eta\tau)$ -тың эллиптикалық косинустың дербес жағдайы болатынын ескерсек (42)-теңдеу (43) түрінде болады

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + 2\zeta_1 \dot{f}_1 + (f_1 - f_2) + \varepsilon(f_1 - f_2)^3 &= \omega_f^2 \operatorname{cn}(\omega_f \tau, k), \\ \ddot{f}_2 + 2\mu\zeta_2 \dot{f}_2 - \mu(f_1 - f_2) - \mu\varepsilon(f_1 - f_2)^3 + \mu\lambda f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (43)$$

мұндағы  $\omega_f \equiv \eta$ , ал  $\operatorname{cn}(\omega_f \tau, k)$  эллиптикалық косинусының эллиптикалық модулі нольге тең болған жағдайда, яғни  $k = 0$ ,  $\operatorname{cn}(\omega_f \tau, 0) = \cos(\eta\tau)$ .

Механикалық жүйелердің меншікті және мәжбүрлі тербелістері орын алған жағдайда, бейсызықтықтың дәрежесі аз болуына байланысты, жүйе сызықты-(а) жағдайына жақын бейсызықты-(б) жағдайына сәйкес келетін квазигармоникалық тербеліс жасайды (26-сурет). 26-суреттен (44)-(48) қатынастары орын алатынын ескерсек [98, 78-б], (43) теңдеулер жүйесінің шешімін эллиптикалық функциялар қосындысы қатары ретінде іздеуге болады.

$$\operatorname{cn}(u, k) = \frac{x}{a}, \operatorname{sn}(u, k) = \frac{y}{b}, \operatorname{dn}(u, k) = \frac{r}{a}, \quad (44)$$



26-сурет. Механикалық жүйенің сызықты-(а) және бейсызықты-(б) жағдайдағы қозғалыстары.

$$u = \int_A^B r d\varphi = \int_A^B \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (45)$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}.$$

$$\varphi = \text{amp}(u, k) = \int_0^u \text{dn}(u', k) du', \quad (46)$$

мұндағы  $\text{amp}(u)$  функциясы бірінші текті эллиптикалық интегралға кері функция болып табылады, яғни

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}. \quad (47)$$

Жоғарыда келтірілген (44)-(47) өрнектерін ескере отырып эллиптикалық функцияларға тән, келесі бөлімдерде қолданылатын негізгі қатынастарды (48) түрінде көрсетейік

$$\begin{aligned} \text{cn}^2(u, k) + \text{sn}^2(u, k) &= 1, \\ \text{dn}^2(u, k) + k^2 \text{sn}^2(u, k) &= 1, \\ \frac{d}{du} \text{sn}(u, k) &= \text{cn}(u, k) \text{dn}(u, k), \\ \frac{d}{du} \text{cn}(u, k) &= -\text{sn}(u, k) \text{dn}(u, k), \\ \frac{d}{du} \text{dn}(u, k) &= -k^2 \text{sn}(u, k) \text{cn}(u, k). \end{aligned} \quad (48)$$

## 2.2 Жүйенің меншікті тербелістері

Жүйенің меншікті тербеліс жиіліктерін анықтайтын жиіліктік теңдеуді кедергі күштерінің меншікті тербелістер жиілігіне әсер етуі мардымсыз болуына байланысты шешімді (49) түрінде іздейміз, яғни

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 \operatorname{cn}(\omega\tau, k), \\ f_2 &= a_2 \operatorname{cn}(\omega\tau, k). \end{aligned} \quad (49)$$

Бұл ретте эллиптикалық функциялардың негізгі қатынастарын ескере отырып

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{d\tau} &= \frac{df_i}{du} \cdot \frac{du}{d\tau} = -\omega a_i \operatorname{sn} \operatorname{dn}, \\ \frac{d^2 f_i}{d\tau^2} &= -\omega^2 a_i (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2) \operatorname{cn}, \end{aligned}$$

мұндағы  $i = 1, 2$ ;  $\operatorname{cn} \equiv \operatorname{cn}(\omega\tau, k)$ ,  $\operatorname{sn} \equiv \operatorname{sn}(\omega\tau, k)$ ,  $\operatorname{dn} \equiv \operatorname{dn}(\omega\tau, k)$ . Жоғарыда алынған қатынастарды ескере отырып және (49)-ды (43) теңдеуге қою арқылы, теңгерімсіздік меншікті жиіліктерге әсер етпейтінін ескеріп, келесідей теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} -\omega^2 a_1 (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2) \operatorname{cn} + (a_1 - a_2) \operatorname{cn} + \varepsilon (a_1 - a_2)^3 \operatorname{cn}^3 &= 0, \\ a_2 (\mu\lambda - \omega^2 (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2)) \operatorname{cn} - \mu (a_1 - a_2) \operatorname{cn} - \mu \varepsilon (a_1 - a_2)^3 \operatorname{cn}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Берілген жүйені шешу мақсатында бірінші теңдеуден

$$-\omega^2 a_1 (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2) \operatorname{cn} + (a_1 - a_2) \operatorname{cn} = -\varepsilon (a_1 - a_2)^3 \operatorname{cn}^3,$$

анықтауға болады. Берілген теңдеуді екінші теңдеуге қойып және

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{cn}(u)}{1 + \operatorname{dn}(u)}$$

екенін ескеріп, және бірдей гармоникалардың коэффициенттерін теңестірсек онда келесідей алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2) + \frac{1}{2} \omega^2 k^2 a_1 - \omega^2 a_1 + \frac{3}{4} \varepsilon (a_1 - a_2)^3 &= 0, \\ \varepsilon (a_1 - a_2)^3 - 2\omega^2 k^2 a_1 &= 0, \\ \mu((\lambda + 1)a_2 - a_1) + \frac{1}{2} \omega^2 k^2 a_2 - \omega^2 a_2 - \frac{3}{4} \mu \varepsilon (a_1 - a_2)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Берілген жүйенің екінші теңдеуінен айнымалы эллиптикалық модульды анықтауға мүмкіндік беретін теңдеуді келесідей түрде алуға болады.

$$k = \sqrt{\frac{\varepsilon(a_1 - a_2)^3}{2\omega^2 a_1}}.$$

Онда сәйкесінше алгебралық теңдеулер жүйесінен

$$a_1 = -\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\omega^2 \tilde{k}}\right) a_2, \quad (50)$$

$$\frac{3}{4} \varepsilon \left( \frac{-(\omega^2 \tilde{k} + \mu\lambda)}{\mu\omega^2 \tilde{k}} - 1 \right)^3 a_2^3 - \left( \frac{(1 + \omega^2 \tilde{k})(\omega^2 \tilde{k} + \mu\lambda)}{\mu\omega^2 \tilde{k}} - 1 \right) a_2 = 0,$$

мұндағы  $\tilde{k} = \left(\frac{1}{2}k^2 - 1\right)$ . Бұл жерден көріп тұрғанымыздай қарапайым тригонометриялық функцияларды қолдану жағдайынан алғашқы ерекшелік ол қосымша келтірілген эллиптикалық модуль  $\tilde{k} = \left(1 - \frac{1}{2}k^2\right)$ , яғни  $-\frac{1}{2}k^2$  мүшесінің бар болуы болып табылады. Ол қосылғыш өз кезегінде меншікті, және алдағы уақытта көретініміздей мәжбүрлі тербелістердің де, амплитудаларын анықтау барысында дәлірек, жалпылама түрдегі нәтижелерді алуға мүмкіндік береді. Көптеген авторлармен [99-105] қарапайым тригонометриялық функцияларды қолдану арқылы анықталған амплитуда өрнектері, біз алған теңдеулердің эллиптикалық модульдың шамасы нольге тең болған кездегі дербес жағдайы болып табылады, яғни  $k = 0 \Rightarrow \tilde{k} = 1$ . (50) теңдеулер жүйесінен жалпы жағдайда ротор мен фундаменттің меншікті амплитудаларын сипаттайтын үш түбір шығады. Олардың алғашқысы  $a_1 = a_2 = 0$  тривиалды шешімі. Қалған түбірлер сәйкесінше

$$a_1 = \pm \frac{2k'}{(k' - 1)} \sqrt{\frac{1 - k'k''}{3\varepsilon(k' - 1)}}, \quad (51)$$

$$a_2 = \pm \frac{2}{(k' - 1)} \sqrt{\frac{1 - k'k''}{3\varepsilon(k' - 1)}},$$

мұндағы

$$k' = -\frac{\omega^2 \tilde{k} + \mu\lambda}{\mu\omega^2 \tilde{k}}, k'' = (1 + \omega^2 \tilde{k}).$$

Демек осылайша аналитикалық түрде ротор мен фундаменттің бейсызық меншікті тербеліс амплитудаларын анықтауға және амплитудажиліктік сипаттаманың қисықтар қаңқасын тұрғызуға (яғни  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$  жағдайында) мүмкіндік беретін теңдеулер жүйесі алынды.

### 2.3 Жүйенің мәжбүрлі тербелістері

Жүйенің орныққан мәжбүрлі тербелістер жағдайын қарастырып, шешімді ұйытқушы күшпен салыстырғанда кедергі бар болуы себепті фазада кешігу орын алуына байланысты (63) түрінде іздейміз.

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1 \operatorname{cn}(\omega_f \tau, k) + B_1 \operatorname{sn}(\omega_f \tau, k), \\ f_2 &= A_2 \operatorname{cn}(\omega_f \tau, k) + B_2 \operatorname{sn}(\omega_f \tau, k), \end{aligned} \quad (52)$$

Эллиптикалық функциялардың негізгі қатынастарын және (52) теңдеулер жүйесін ескере отырып

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{d\tau} &= \frac{df_i}{du} \cdot \frac{du}{d\tau} = -\omega_f A_i \operatorname{sn} \operatorname{dn} + \omega_f B_i \operatorname{cn} \operatorname{dn}, \\ \frac{d^2 f_i}{d\tau^2} &= -\omega_f^2 A_i (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2) \operatorname{cn} - \omega_f^2 k^2 B_i (1 - k^2 + 2k^2 \operatorname{cn}^2) \operatorname{sn}, \end{aligned} \quad (53)$$

мұндағы  $i = 1, 2$ ;  $\operatorname{cn} \equiv \operatorname{cn}(\omega_f \tau, k)$ ,  $\operatorname{sn} \equiv \operatorname{sn}(\omega_f \tau, k)$ ,  $\operatorname{dn} \equiv \operatorname{dn}(\omega_f \tau, k)$ .

(52) пен (53) ескеріп мәжбүрлі тербелістердің амплитудаларын анықтауға болатын (54) түріндегі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{aligned} &\operatorname{cn} \left[ \omega_f^2 (2k^2 - 1) A_1 + (A_1 - A_2) + 3\varepsilon (A_1 - A_2) (B_1 - B_2)^2 - \omega_f^2 + 2\zeta_1 \omega_f B_1 H_2 \right] + \\ &+ \operatorname{sn} \left[ \begin{aligned} &\omega_f^2 (k^2 - 1) B_1 + (B_1 - B_2) + \varepsilon (B_1 - B_2)^3 - \\ &- 2\zeta_1 \omega_f A_1 H_1 + H_3 \left( \varepsilon (3(A_1 - A_2)^2 - (B_1 - B_2)^2) (B_1 - B_2) - 2\omega_f^2 k^2 B_1 \right) \end{aligned} \right] + \\ &+ \operatorname{cn}^3 \left[ \varepsilon (A_1 - A_2)^3 - 2\omega_f^2 k^2 A_1 - 3\varepsilon (A_1 - A_2) (B_1 - B_2)^2 \right] = 0, \\ &\operatorname{cn} \left[ \omega_f^2 (2k^2 - 1) A_2 - \mu (A_1 - A_2) - 3\mu \varepsilon (A_1 - A_2) (B_1 - B_2)^2 + \mu \lambda A_2 + 2\mu \zeta_2 \omega_f B_2 H_2 \right] + \\ &+ \operatorname{sn} \left[ \begin{aligned} &\omega_f^2 (k^2 - 1) B_2 - \mu (B_1 - B_2) - \mu \varepsilon (B_1 - B_2)^3 + \mu \lambda B_2 - \\ &- 2\mu \zeta_2 \omega_f A_2 H_1 + H_3 \left( -\mu \varepsilon (3(A_1 - A_2)^2 - (B_1 - B_2)^2) (B_1 - B_2) - 2\omega_f^2 k^2 B_2 \right) \end{aligned} \right] + \\ &+ \operatorname{cn}^3 \left[ -\mu \varepsilon (A_1 - A_2)^3 - 2\omega_f^2 k^2 A_2 + 3\mu \varepsilon (A_1 - A_2) (B_1 - B_2)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Мұндағы



$$H_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u du = \frac{4}{3k^2\pi} \left[ (2k^2 - 1)E + K(1 - k^2) \right],$$

$$H_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u du = \frac{4}{3k^2\pi} \left[ (1 + k^2)E - K(1 - k^2) \right],$$

$$H_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sn} u \operatorname{cn}^2 u \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{4K} \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn} u du = \frac{1}{4},$$

$$K = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \approx \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + O(k^6) \right],$$

$$E = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \approx \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 + O(k^6) \right].$$

Бұл жердегі  $E \equiv E(\varphi, k)$  – екінші текті толық емес, ал  $K \equiv K(\varphi, k)$  – бірінші текті толық эллиптикалық интеграл.

(54) теңдеудегі бірдей гармоникалар алдындағы коэффициенттерді теңестіре отырып ротор мен фундаменттің мәжбүрлі тербелістер амплитудасын анықтауға мүмкіндік беретін (55) түріндегі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз, яғни

$$(A_1 - A_2) + \frac{1}{2}\omega_f^2 k^2 A_1 - \omega_f^2 A_1 + \frac{3}{4}\varepsilon(A_1 - A_2) \left( (A_1 - A_2)^2 + (B_1 - B_2)^2 \right) - \omega_f^2 + 2\zeta_1 \omega_f B_1 H_2 = 0,$$

$$(B_1 - B_2) + \frac{1}{2}\omega_f^2 k^2 B_1 - \omega_f^2 B_1 + \frac{3}{4}\varepsilon(B_1 - B_2) \left( (A_1 - A_2)^2 + (B_1 - B_2)^2 \right) - 2\zeta_1 \omega_f A_1 H_1 = 0,$$

$$\varepsilon(A_1 - A_2)^3 - 2\omega_f^2 k^2 A_1 - 3\varepsilon(A_1 - A_2)(B_1 - B_2)^2 = 0,$$

$$\mu \left( (\lambda + 1)A_2 - A_1 \right) + \frac{1}{2}\omega_f^2 k^2 A_2 - \omega_f^2 A_2 - \frac{3}{4}\mu\varepsilon(A_1 - A_2) \left( (A_1 - A_2)^2 + (B_1 - B_2)^2 \right) + 2\mu\zeta_2 \omega_f B_2 H_2 = 0, \quad (55)$$

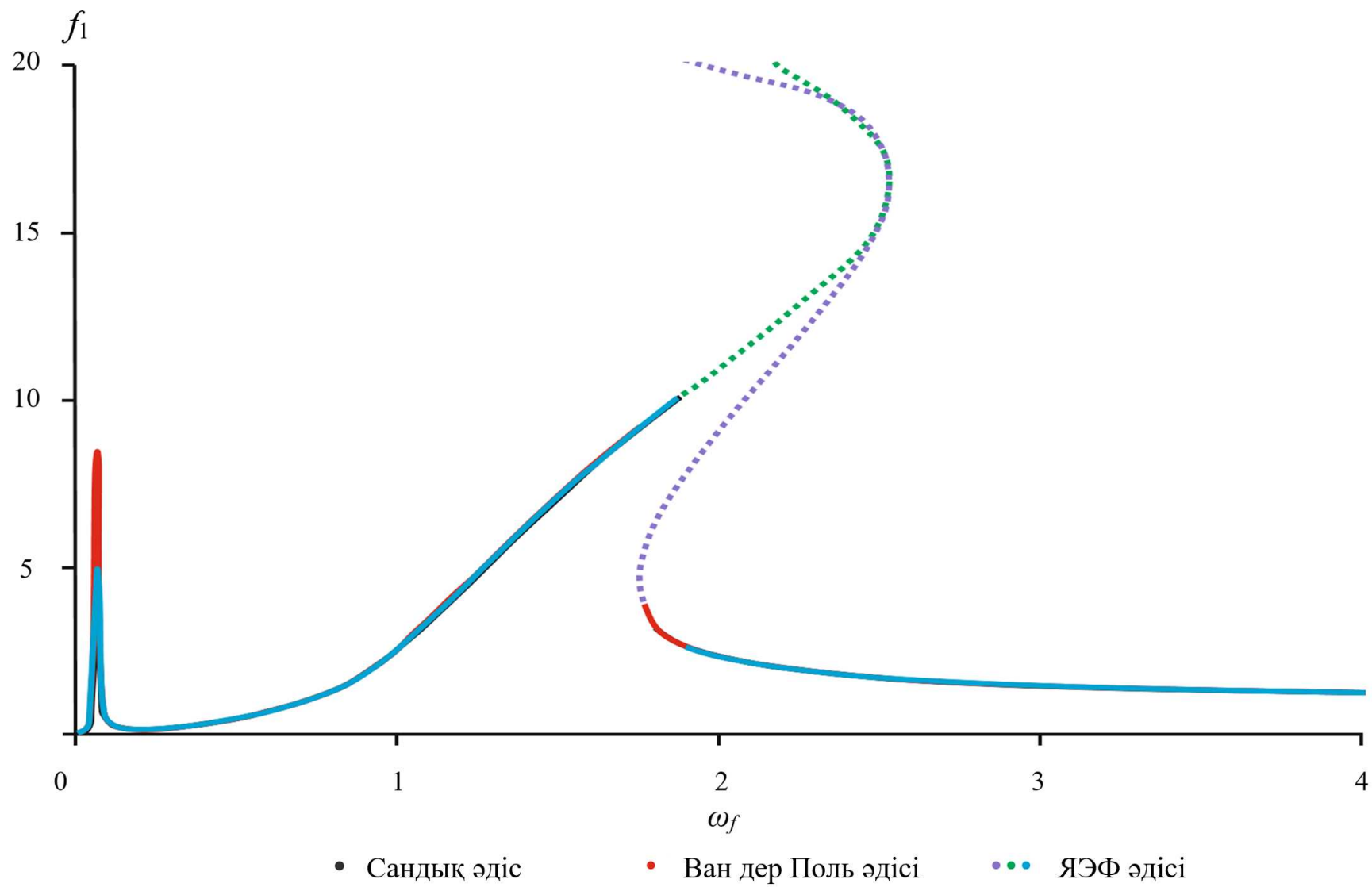
$$\mu \left( (\lambda + 1)B_2 - B_1 \right) + \frac{1}{2}\omega_f^2 k^2 B_2 - \omega_f^2 B_2 - \frac{3}{4}\mu\varepsilon(B_1 - B_2) \left( (A_1 - A_2)^2 + (B_1 - B_2)^2 \right) - 2\mu\zeta_2 \omega_f A_2 H_1 = 0,$$

$$-\mu\varepsilon(A_1 - A_2)^3 - 2\omega_f^2 k^2 A_2 + 3\mu\varepsilon(A_1 - A_2)(B_1 - B_2)^2 = 0.$$

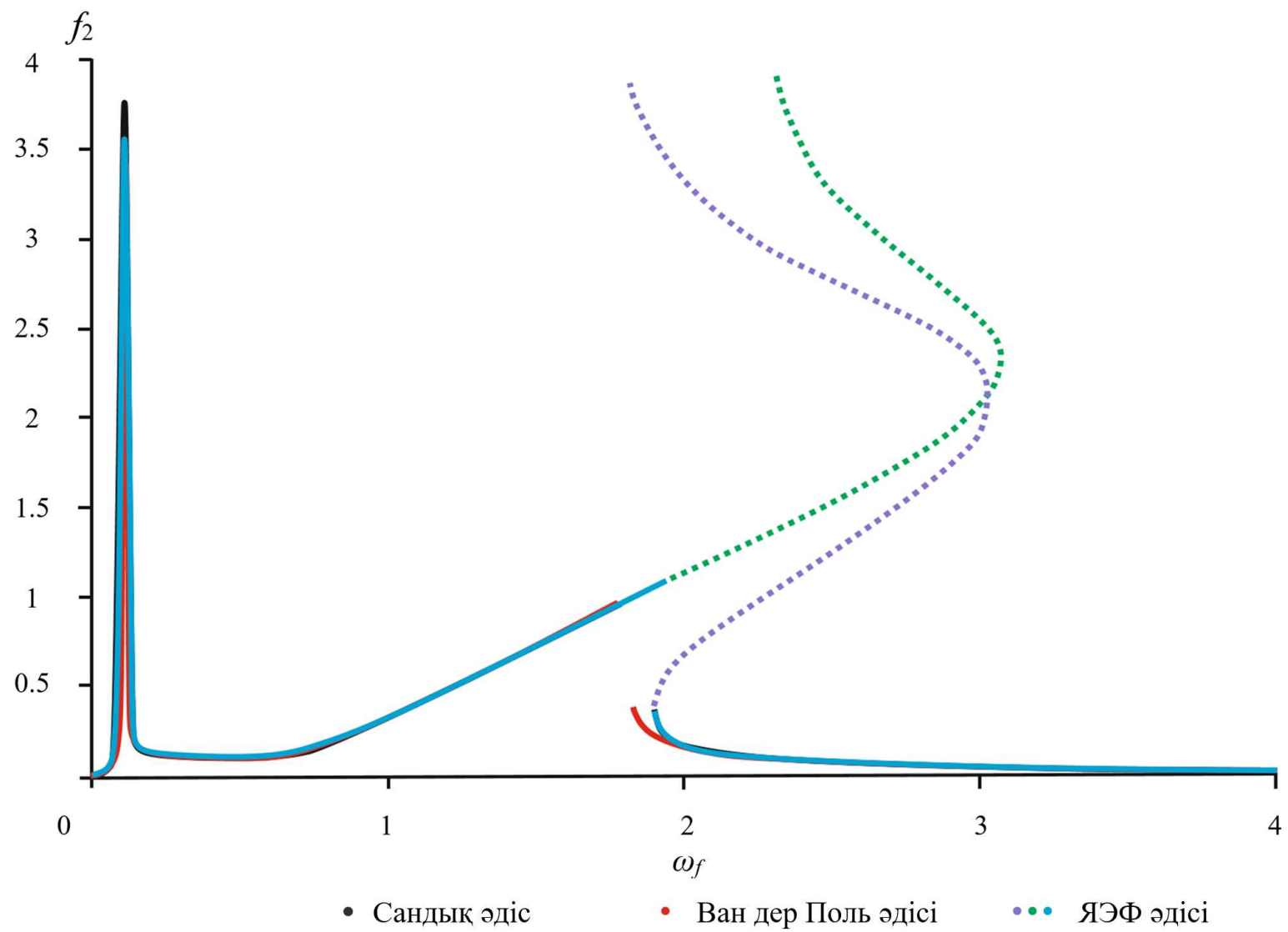
$$k^2 = \frac{\varepsilon(A_1 - A_2) \left( (A_1 - A_2)^2 - 3(B_1 - B_2)^2 \right)}{2\omega_f^2 A_1}.$$

(55) теңдеулер жүйесінен ротор мен фундаменттің мәжбүрлі тербелістерінің амплитудасын ұйытқушы күштің циклдік жиілігін вариациялау арқылы табылды, және сәйкесінше амплитуда-жиілікті сипаттамалар (АЖС) тұрғызылды (27 – 36-суреттер).

Якоби эллиптикалық функциялар (ЯЭФ) әдісіне бағалау жүргізу үшін (43) теңдеулер жүйесі Рунге-Кутта-Фельберг сандық әдісімен және аналитикалық баяу өзгерісті амплитудалар (Ван дер Поль) әдістері қолданылды (27 және 28 суреттер). Жүйеде фундаменттің қозғалысы орын алуы себепті екі резонанс байқалады. Алғашқы резонанс үш әдіс үшін де бір жиілікте ( $\omega_f = 0.051$ ) орын алады.



Сурет 27 – Әр түрлі әдістерді қолдану барысында алынған ротордың АЖС-ы



Сурет 28 – Өр түрлі әдістерді қолдану барысында алынған фундаменттің АЖС-ы

Ван дер Польш әдісін қолдану барысында сандық әдіс мәндерінен ротор амплитудасының мәні 105.3%, ал фундамент амплитудасының мәні 9.1%-ға ауытқыды. Эллиптикалық функцияларды қолдану барысында ауытқулар сәйкесінше 33.3%, және 6.4% құрады.

Негізгі резонанста орын алатын амплитудалардың үзілуі әр әдісті қолдану барысында әр түрле жиілікте байқалды. Ван дер Польш әдісін қолдану барысында амплитудалардың үзілуі сандық әдіспен салыстырғанда ертерек орын алады. Ал эллиптикалық функциялар әдісінде бұл үзілу сандық әдістен кеш болса да өте жақын мәнде орын алатыны байқалды. Бұл жағдайдағы сандық әдістің ең басты кемшіліктердің бірі ретінде бейсызық резонанстың максимал мәнін есептей алмайтыны және бейсызықтықтың үлкен шамаларында қозғалысты сипаттай алмайтыны болып табылады.

Бейсызық амплитуданың максимал мәнін анықтаумен және АЖС тұрғызумен Ван дер Польш, Дж.Стокер, А.Х.Найфэ, D.Mook, K.Klotter, С.П.Тимошенко, С.Хаяси, А.Тондл, К.Магнус, Н.Kauderer, С.С.Пао, В.Валачандран, L.Cveticanin, I.Kovacic және т.б. сияқты авторлар айналысты. Көптеген авторлардың әдістерін жалпы түрде жуықталған аналитикалық әдістер (гармоникалық баланс әдісі, баяу өзгермелі амплитудалар әдісі, көп масштабтар әдісі и т.д.) мен графо-аналитикалық әдістер (изоклиндар әдісі, Льенар әдісі, дельта-әдіс и т.д.) деп бөлуге болады. Бейсызық резонанстың максимал мәнін табудағы басты қиыншылық максимал мәннің амплитудалар үзілісі аймағынан тысқары, жоғарырақ жиіліктерде жатуында. Ван дер Польш әдісі арқылы максимум нүктесі табылғанымен оның дәлдігі төмен болып табылады. Эллиптикалық функцияларды қолдану жалпылығымен пен жоғары дәлдіктің арқасында бұл кемшіліктерді жояды.

Якобидің эллиптикалық функцияларын қолдану эллиптикалық модульден тәуелді амплитудаларды анықтауға мүмкіндік беретін жалпыланған алгебралық теңдеулер жүйесін береді. Бұл жерде бейсызық резонанстың максимал мәні амплитудалардың орнықсыз мәндерінің қиылысуында пайда болатынын айта кеткен жөн.

Жүйенің амплитудасының максималды мәндерін бағалау және оптимальді жұмыс режимін анықтау үшін ротордың және фундаменттің АЖС-лары бейсызықтық ( $\varepsilon$ ), демпферлеу коэффициенттері ( $\zeta_1$  және  $\zeta_2$ ), сызықтық қатаңдықтың ( $\lambda$ ) және ротор мен фундаменттің массалар қатынастары ( $\mu$ ) әр түрлі жағдайлары үшін тұрғызылды (29-36 суреттер).

Бейсызықтық дәрежесінің кемуі (29 және 30 суреттер,  $\varepsilon = 0.1$  және  $\varepsilon = 0.5$  жағдайлары) ротор үшін де, фундамент үшін де бірінші сызықты резонанс амплитуда шамасының ұлғаюына әкеледі, бұл ретте оның жиілігі екі жағдайда да  $\varepsilon = 1$ , яғни  $\omega_f = 0.051$  жағдайымен сәйкес келеді. Мысалы  $\varepsilon = 0.5$  кезінде ротордың амплитудасы  $f_1 = 8$ , ал фундаменттің амплитудасы  $f_2 = 3.95$  құрайды, бұл  $\varepsilon = 1$  жағдайынан сәйкесінше 1.5 және 1.13 есе үлкен.  $\varepsilon = 0.1$  кезінде ротордың амплитудасы  $f_1 = 9.8$ , ал фундаменттікі  $f_2 = 5$ , бұл  $\varepsilon = 1$  жағдайынан 1.96 және 1.43 есе үлкен. Көріп тұрғанымыздай бейсызықтылық дәрежесі кемуімен екінші бейсызық резонанстың амплитуда шамалары өзгермейді, алайда бұл жағдайларда амплитудалардың үзілу жиілігі

жиіліктердің азаю бағытында солға қарай ығысады, сәйкесінше, бейсызық резонансқа сәйкес келетін амплитуда-жиіліктік сипаттама қисықтарының еңкею деңгейі төмендеп,  $\varepsilon = 0$  кезінде орын алатын сызықтық жағдайға ұмтылады. Мысалы  $\varepsilon = 0.5$  кезінде амплитудалардың үзілуі  $\omega_f = 1.2$  жиілігінде орын алса,  $\varepsilon = 0.1$  кезінде амплитудалардың үзілуі  $\omega_f = 1.15$  орын алатыны байқалады. Бірінші сызықты резонанс жиілігі бұл жағдайларда өзгермей  $\varepsilon = 1$  жағдайымен сәйкес келеді. Бейсызықтық дәрежесінің артуымен бірінші сызықты резонанс амплитудаларының шамасы кемиді ал екінші бейсызық резонанс шамасы жағынан өзгермейтіні байқалады, мысалы  $\varepsilon = 5$  кезінде, ротордың сызықты амплитудасы  $f_1 = 3.95$ , ал фундаменттің амплитудасы  $f_2 = 3.25$  құрайды, бұл болса өз кезегінде  $\varepsilon = 1$  жағдайынан сәйкесінше 1.26 және 1.08 есе аз болып табылады.  $\varepsilon = 10$  жағдайында ротордың сызықты, яғни бірінші амплитудасы  $f_1 = 2.2$ , ал фундаменттікі  $f_2 = 2.5$  тең, демек бұл ретте амплитудалар  $\varepsilon = 1$  жағдайынан 2.27 және 1.4 есе аз болып табылады. Бұл жағдайларда амплитудалардың үзілу жиіліктері оң бағытта, яғни жиіліктердің арту бағытында ығысады. Мысалы  $\varepsilon = 5$  кезінде үзілу  $\omega_f = 1.4$  байқалса,  $\varepsilon = 10$  жағдайында үзілу  $\omega_f = 1.43$  жиілігінде орын алады. Сонымен қатар бейсызықтық дәрежесінің артуымен бейсызық резонансқа сәйкес келетін амплитуда-жиіліктік сипаттама қисықтарының еңкею деңгейі артып «қатты» бейсызықтық жағдайы орын алатыны байқалады.

Демпферлеу коэффициентінің азаюы ротор мен фундаменттің бірінші сызықты және екінші бейсызық резонанс амплитуда шамаларының кемуіне алып келеді (31 және 32 суреттер,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.5$  жағдайлары). Демпферлеу коэффициентінің бастапқы мәнімен салыстырғанда екі есе азайған кезде ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.5$  жағдайы) ротор мен фундамент амплитудаларының 1.5 есе өседі, яғни бірінші резонанста амплитудалар  $f_1 = 7.5$ ,  $f_2 = 5.25$  құрап, сәйкесінше екінші резонанста  $f_1 = 14$ ,  $f_2 = 1.75$  тең болады. Демпферлеу коэффициентінің бір ретке кемуі ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1$  жағдайы) амплитуда шамаларының 2.25 есе артуына алып келеді, яғни ротор мен фундамент амплитудалары сәйкесінше бірінші резонанста  $f_1 = 11.25$ ,  $f_2 = 7.87$  тең болып, екінші резонанста  $f_1 = 15$ ,  $f_2 = 2$  құрайды. Демпферлеу коэффициентінің ұлғаюы ( $\zeta_1 = \zeta_2 = 5$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$  жағдайлары) жалпы жағдайда ротор мен фундамент амплитудаларының кемуіне алып келеді. Мысалы демпферлеу коэффициентінің бастапқы мәнімен салыстырғанда 5 есе артуы ротор мен фундамент амплитудаларының 1.5 есе азаюына алып келіп, бірінші резонанста  $f_1 = 3.33$ ,  $f_2 = 2.33$ , ал екінші резонанста  $f_1 = 12$ ,  $f_2 = 1.25$  құрайды. Демпферлеу коэффициентінің бір ретке ұлғаюы, яғни  $\zeta_1 = \zeta_2 = 10$  жағдайында, ротор мен фундамент амплитудаларының 2.15 есе азаюын қамтасыз етеді, яғни бірінші резонанстың амплитудалар шамасы  $f_1 = 2.325$ ,  $f_2 = 1.63$ , ал екінші резонанс  $f_1 = 10.05$ ,  $f_2 = 0.95$  құрайды. Бұл жағдайларда демпферлеу коэффициентінің өзгеруі резонанстық жиіліктер мен амплитудалардың үзілу жиіліктеріне әсер етпейді.

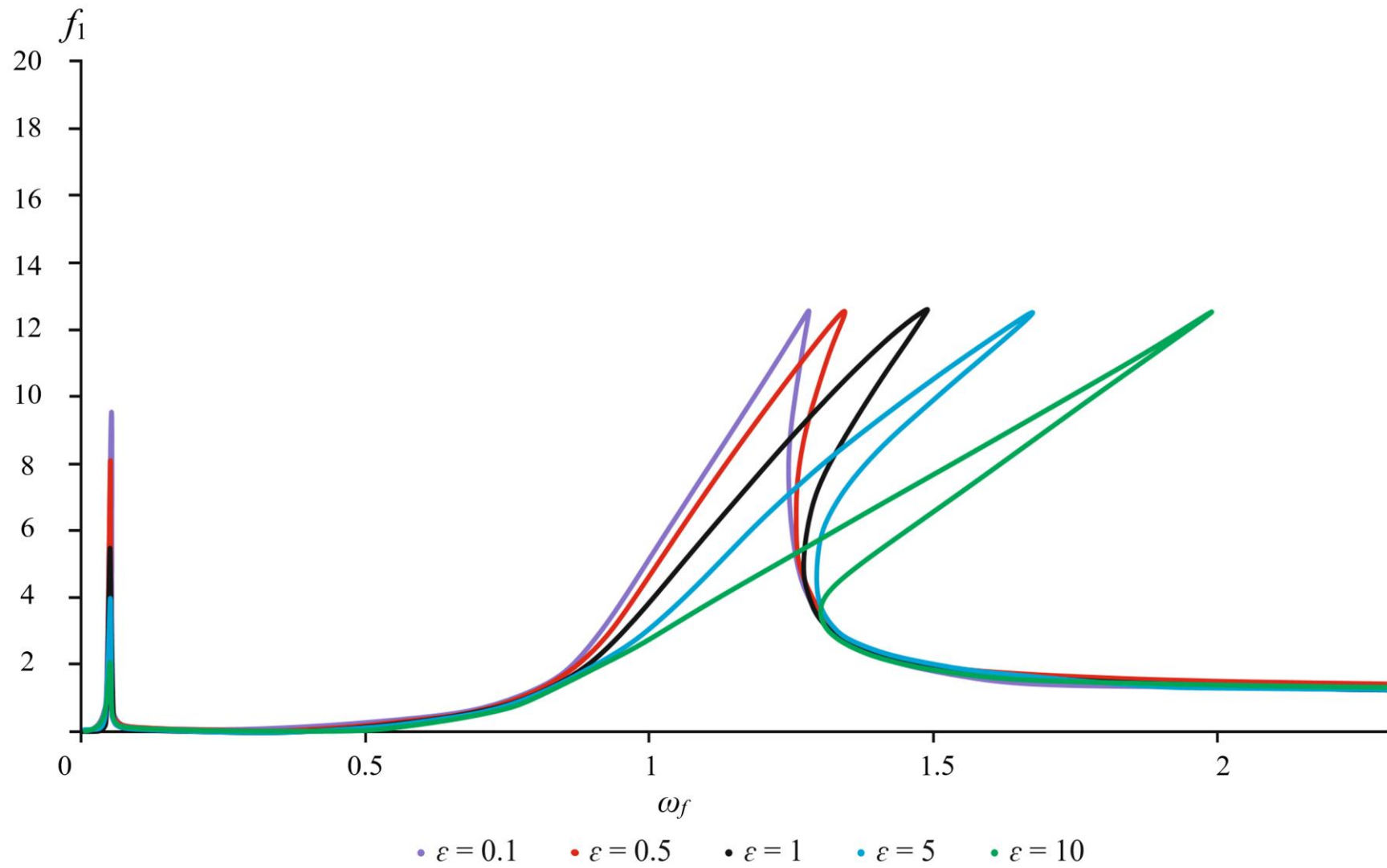
Фундаменттің массасы кемуі себепті массалар қатынасының артуы ротор мен фундаменттің бірінші және екінші резонанс шамасының артуына

алып келеді ( $\mu = 5$  және  $\mu = 10, 33$  және  $34$  суреттер). Мысалы  $\mu = 5$  кезінде ротордың амплитудасы  $f_1 = 7$ , ал фундаменттің амплитудасы  $f_2 = 3.9$  құрайды, яғни бұл жағдайда ротордың амплитудасы  $1.4$  есе, ал фундаменттің амплитудасы  $1.1$  есе артады.  $\mu = 10$  жағдайында амплитудалар  $f_1 = 11.25$  және  $f_2 = 7.87$  құрап, амплитудалардың  $2.25$  есе өсуі байқалады. Массалар қатынасының кемуі ( $\mu = 0.5$  және  $\mu = 0.1$ ), фундамент антижүктеме қызметін атқаруы себепті, жалпы жағдайда ротор мен фундамент амплитудалар шамасының азаюына алып келеді. Мысалы ротордың массасы фундаменттен екі есе ғана кіші болған жағдайда, яғни  $\mu = 0.5$  кезінде ротор мен фундаменттің амплитудалары  $f_1 = 4.7, f_2 = 2.75$  құрайды, ол болса өз кезегінде бастапқы жағдайдан сәйкесінше  $1.06$  және  $1.27$  есе кіші болып табылады. Фундамент массасының ұлғаюы ( $\mu = 0.1$  жағдайы) амплитудалардың одан әрі кішіреюін қамтамасыз етіп, ротор мен фундамент амплитудаларының шамасы  $f_1 = 2.5, f_2 = 2$  дейін азаюына алып келеді. Бұл ретте бастапқы жағдаймен салыстырғанда амплитудалар шамасы сәйкесінше  $2$  және  $1.97$  есе аз болады.

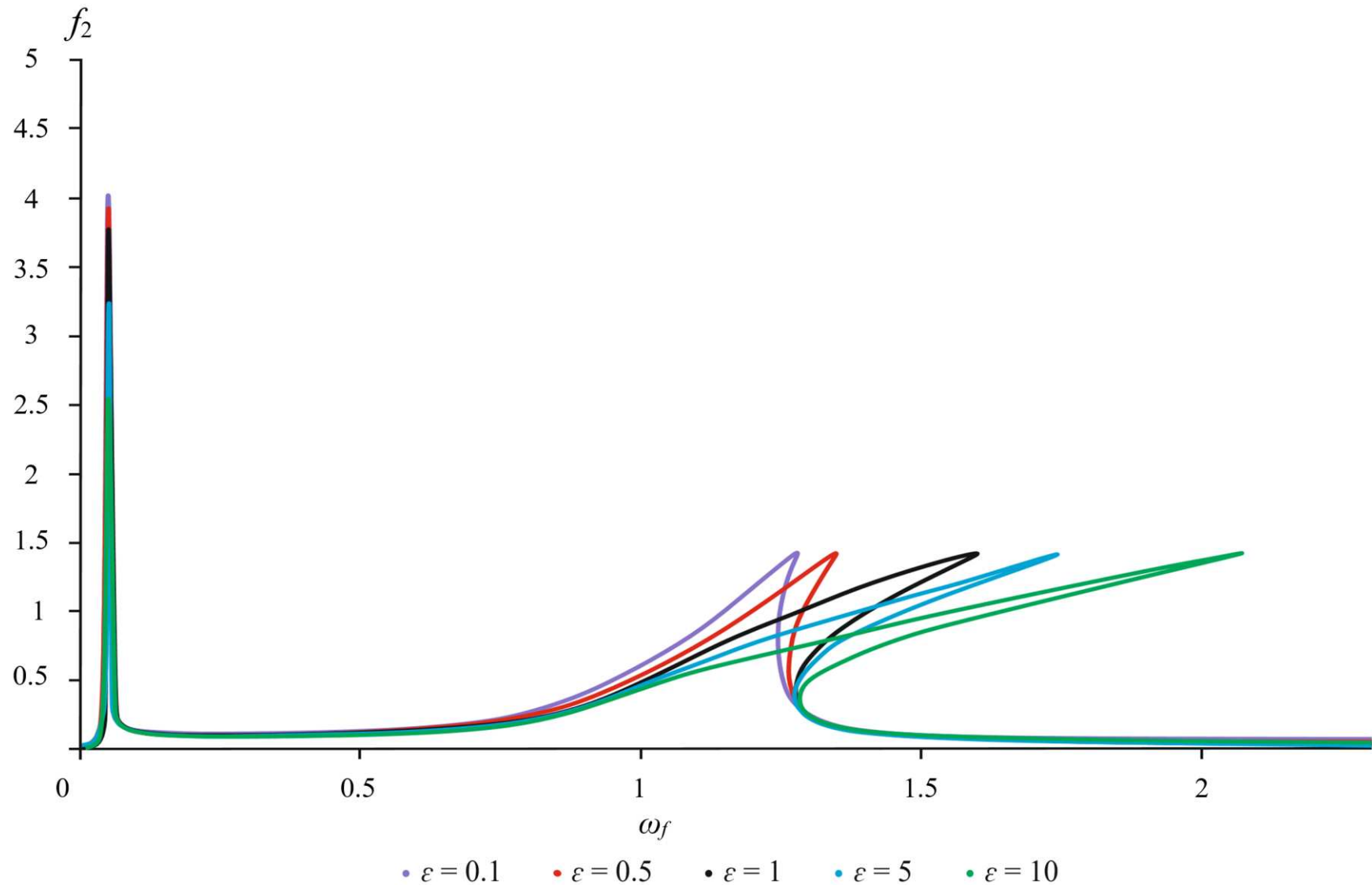
Сызықты қатаңдық коэффициенттер қатынасының өзгеруі жалпы жағдайда резонанстардың ығысуы мен шамасы жағынан өзгеруіне алып келеді. Оның азаюы ( $35$  және  $36$  суреттер,  $\lambda = 0.1$  және  $\lambda = 0.5$  жағдайлары), бірінші және екінші резонанстың жиіліктер осы бойынша солға, яғни кему бағытында, ал амплитудаларының шамасы жағынан артуына әкеліп соғады. Мысалы,  $c_0$  сызықты қатаңдық коэффициентінің екі есе артуы кезінде ( $\lambda = 0.5$  жағдайы) бірінші сызықты резонанс  $\omega_f = 0.04$  мәнінде, ал екінші бейсызық резонансқа тиісті амплитуданың үзілу жиілігі  $\omega_f = 1.25$  мәнінде орын алып, сәйкесінше амплитудалар  $f_1 = 7.14$  және  $f_2 = 4.08$  құрады.  $c_0$  коэффициентінің одан әрі өсуі ( $\lambda = 0.1$  жағдайы) бірінші резонанстың  $\omega_f = 0.04$  мәнінде, ал амплитуданың үзілуін  $\omega_f = 1.15$  мәнінде орын алуына себепші болды, амплитуда мәндері бұл жағдайда  $f_1 = 9.61, f_2 = 7.8$  құрады. Сәйкесінше сызықты қатаңдық коэффициенттер қатынасының артуы, резонанстардың жиіліктер осы бойынша өсу бағытында, ал амплитудалардың шамасы бойынша кемуін қамтамасыз етеді ( $\lambda = 5$  және  $\lambda = 10$  жағдайлары).  $\lambda = 5$  жағдайында бірінші резонанс  $\omega_f = 0.06$  мәнінде, ал амплитуданың үзілуі  $\omega_f = 1.4$  мәнінде орын алды, амплитуда мәндері бұл жағдайда  $f_1 = 3.5, f_2 = 3$  құрады.  $c_0$  коэффициентінің одан әрі кемуі ( $\lambda = 10$  жағдайы) бірінші резонанс пен үзілу нүктесінің жиіліктер осы бойынша оңға, сәйкесінше  $\omega_f = 0.07$  және  $\omega_f = 1.45$  жиіліктерінде орын алуына себепші болып, амплитудалардың  $f_1 = 2.6, f_2 = 2$  мәндерін құрап, шамасы жағынан одан әрі кемуін қамтамасыз етеді.

Демек, осылайша, жүйенің шамасы жағынан төмен амплитудаларда жұмыс жасау үдерісін бейсызықты, демпферлеу және сызықты қатаңдық коэффициенттерін және фундамент массасын конструктивті және экономикалық тұрғыдан тиімсіз шектеулерді ескере отырып белгілі бір деңгейге дейін арттыру арқылы қамтамасыз етуге болады.

Алынған нәтижелердің ЭЕМ-да есептеу алгоритмі В қосымшасында келтірілген.

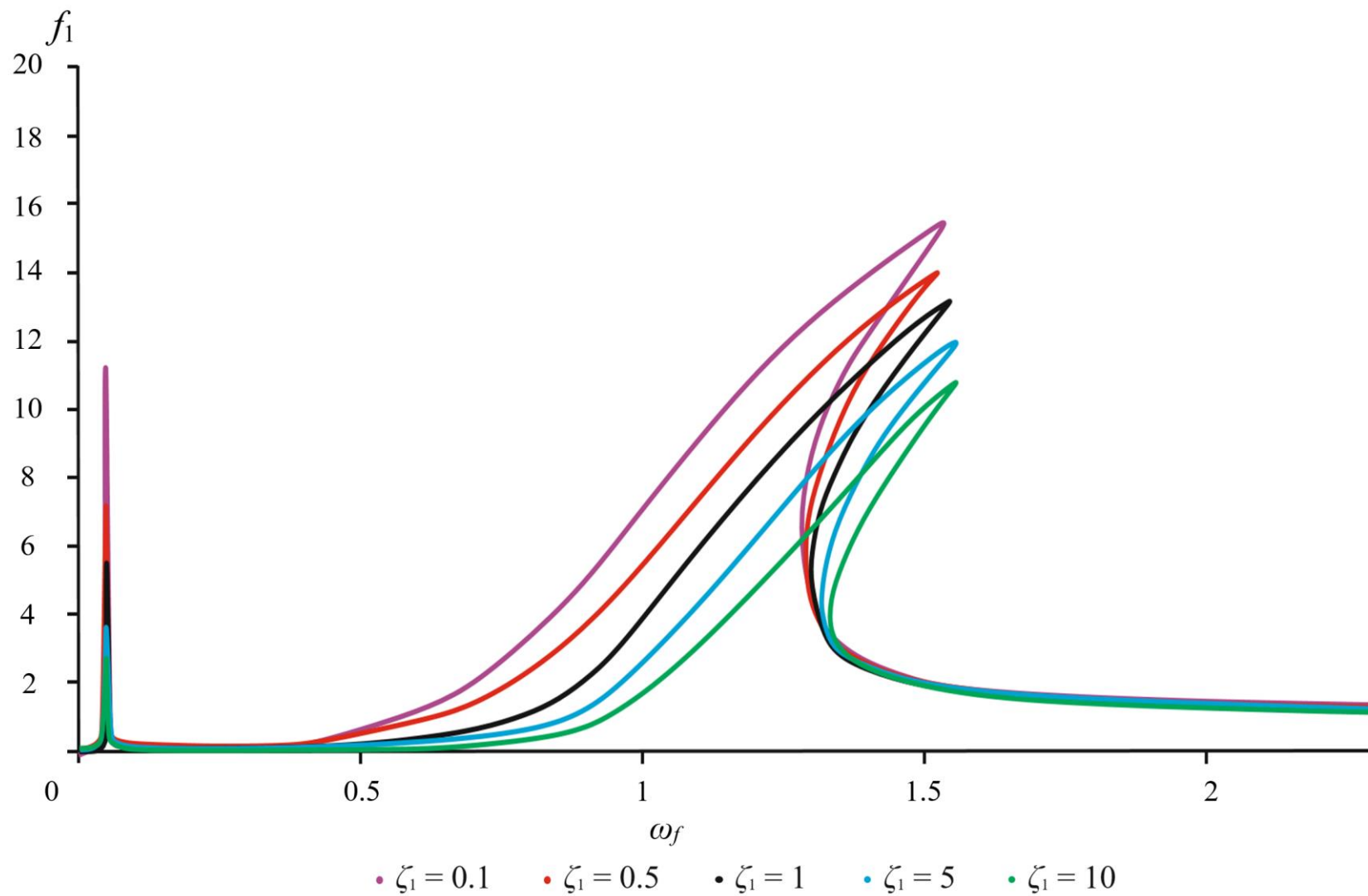


Сурет 29 – Бейсызықтық коэффициентінің әр түрлі мәндері үшін ротордың АЖС-ы

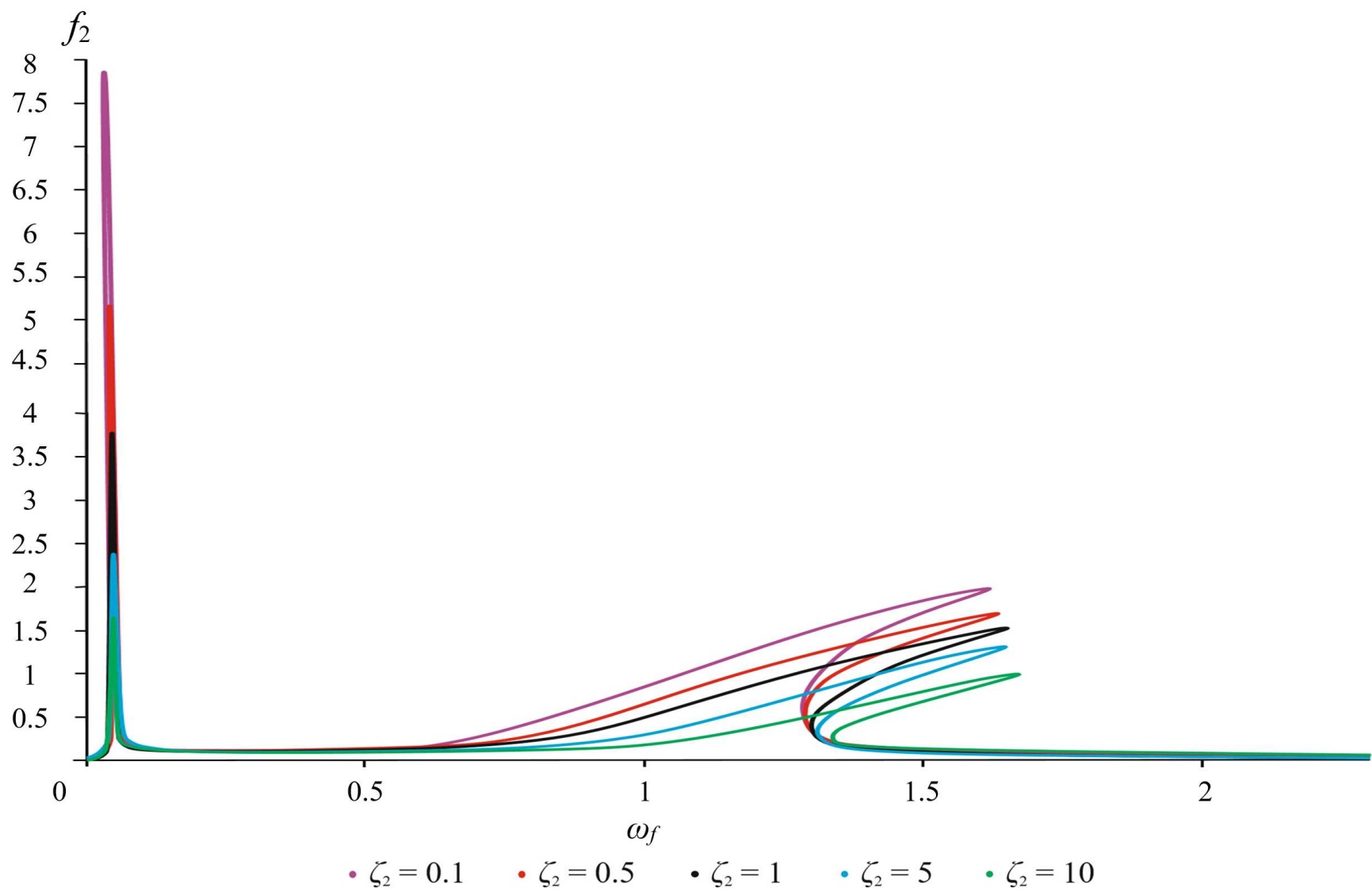


Сурет 30 – Бейсызықтық коэффициентінің әр түрлі мәндері үшін фундаменттің АЖС-ы

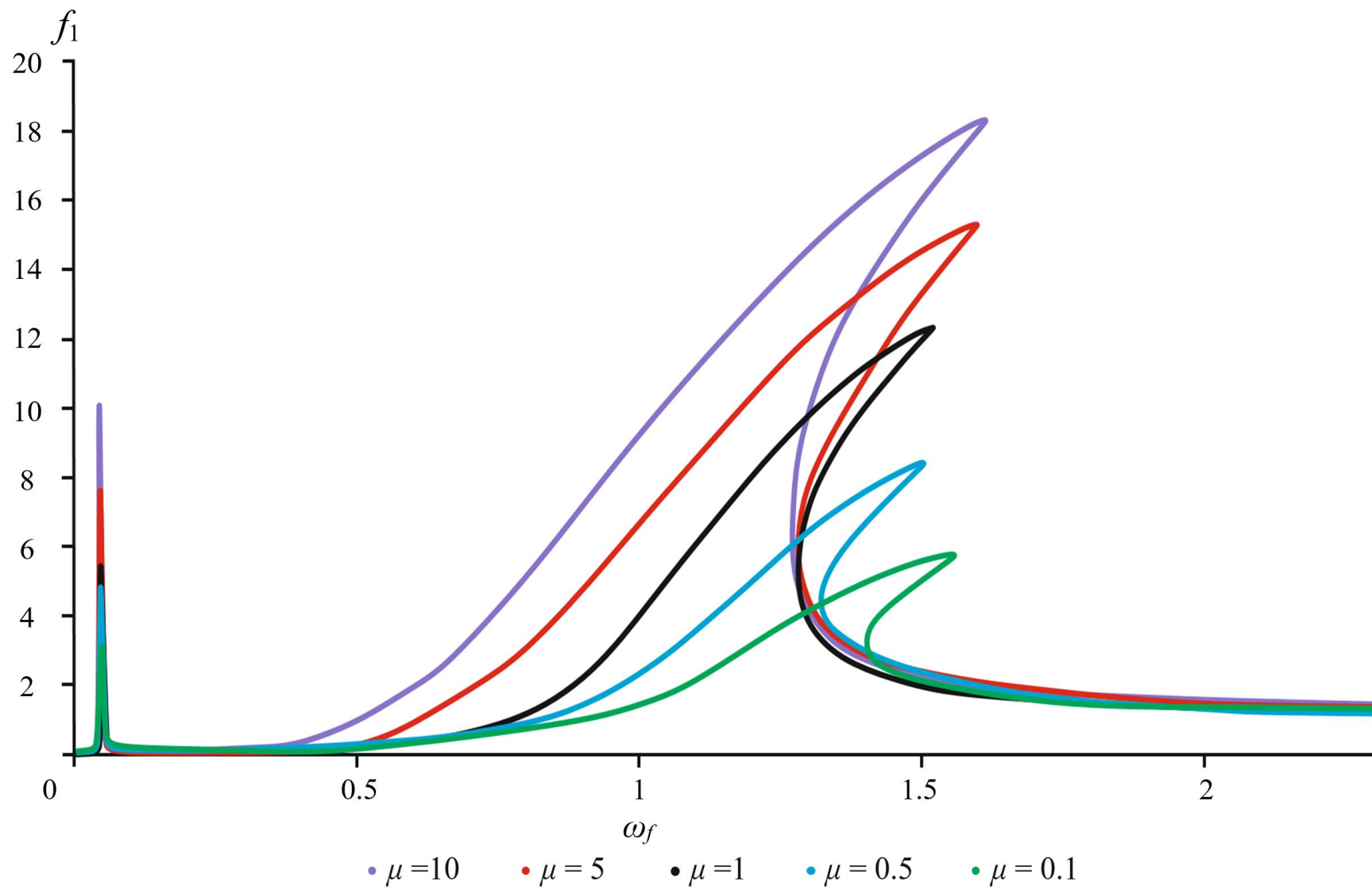




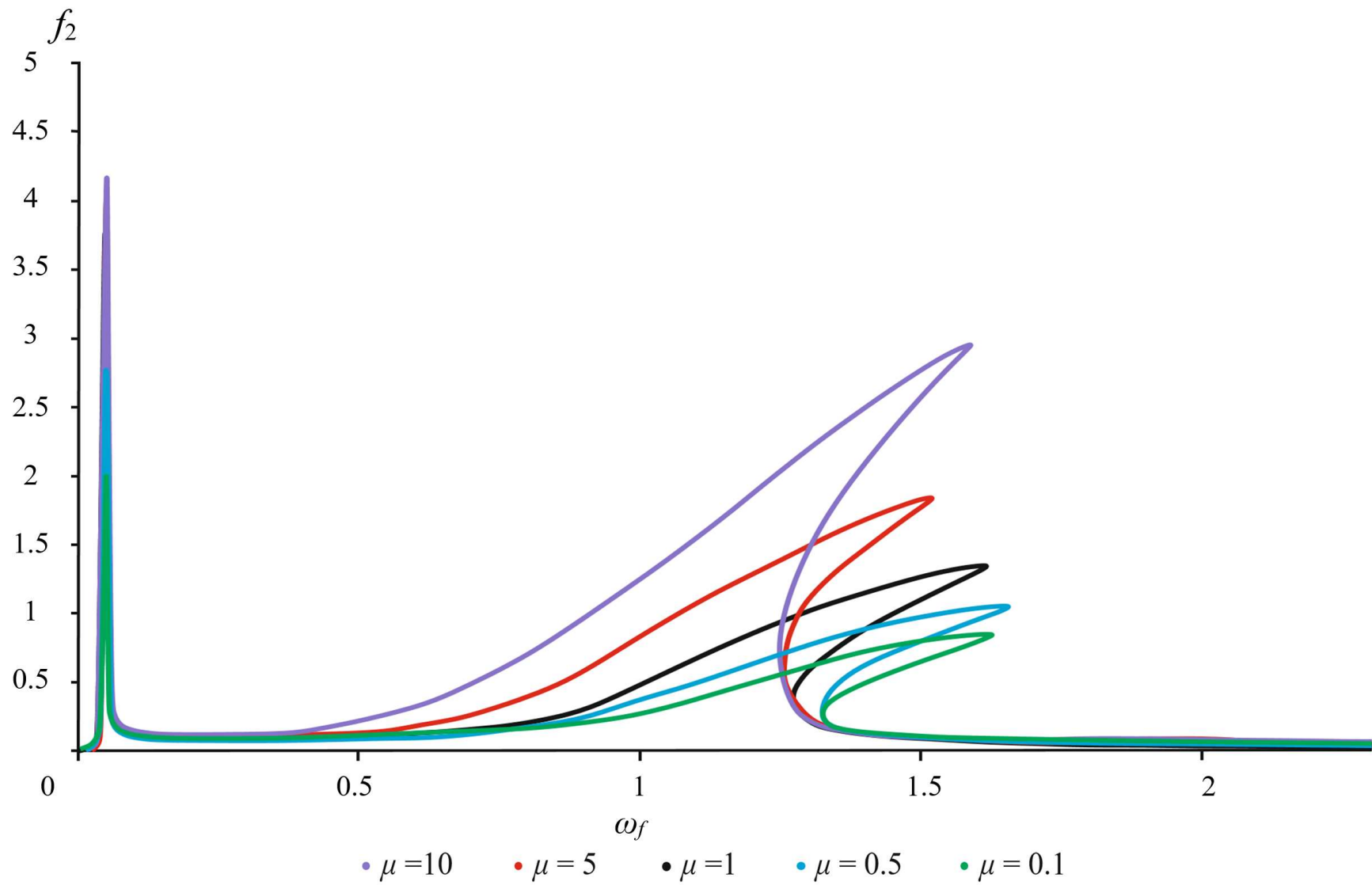
Сурет 31 – Демпферлеу коэффициентінің әр түрлі мәндері үшін ротордың АЖС-ы



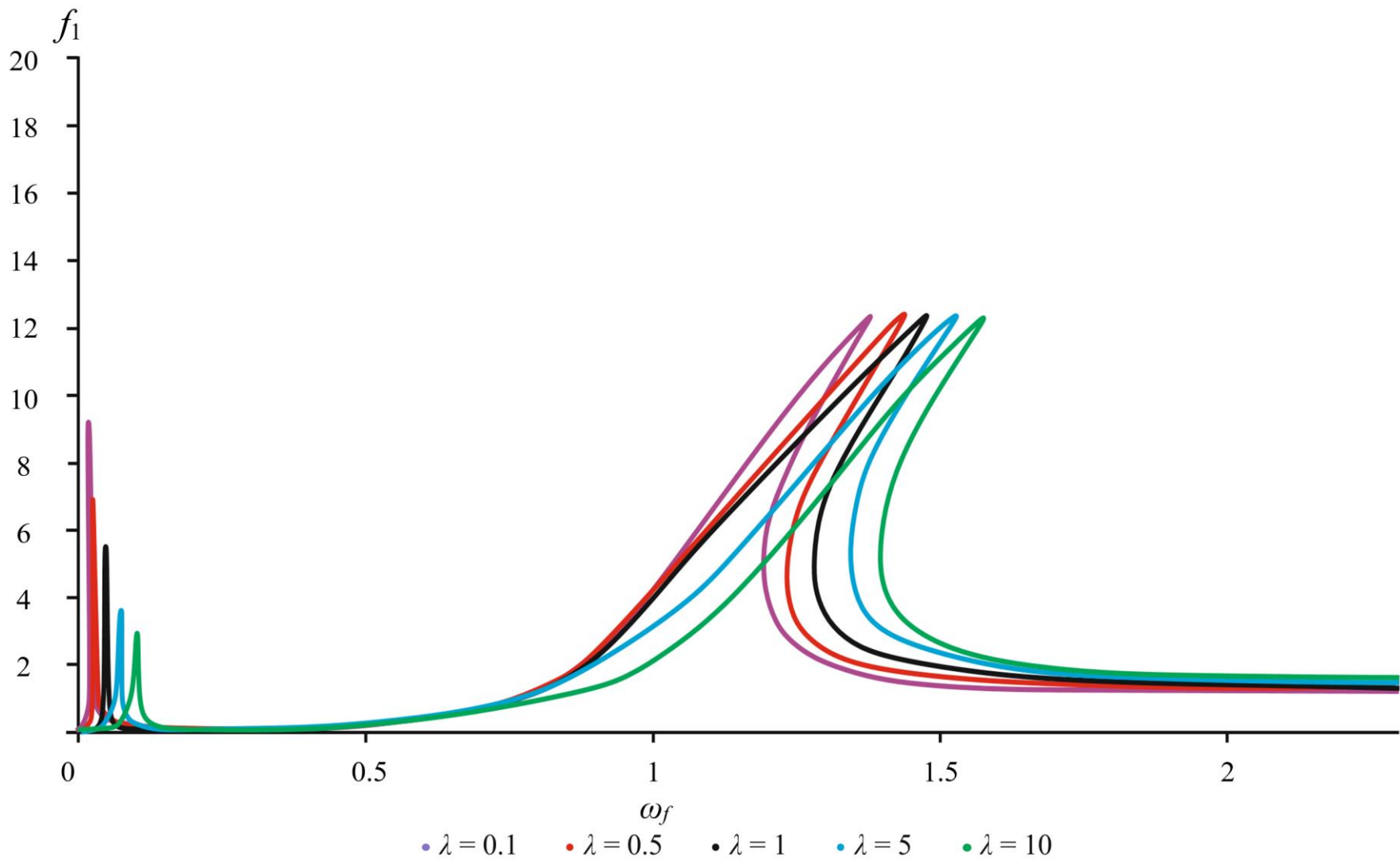
Сурет 32 – Демпферлеу коэффициентінің әр түрлі мәндері үшін фундаменттің АЖС-ы



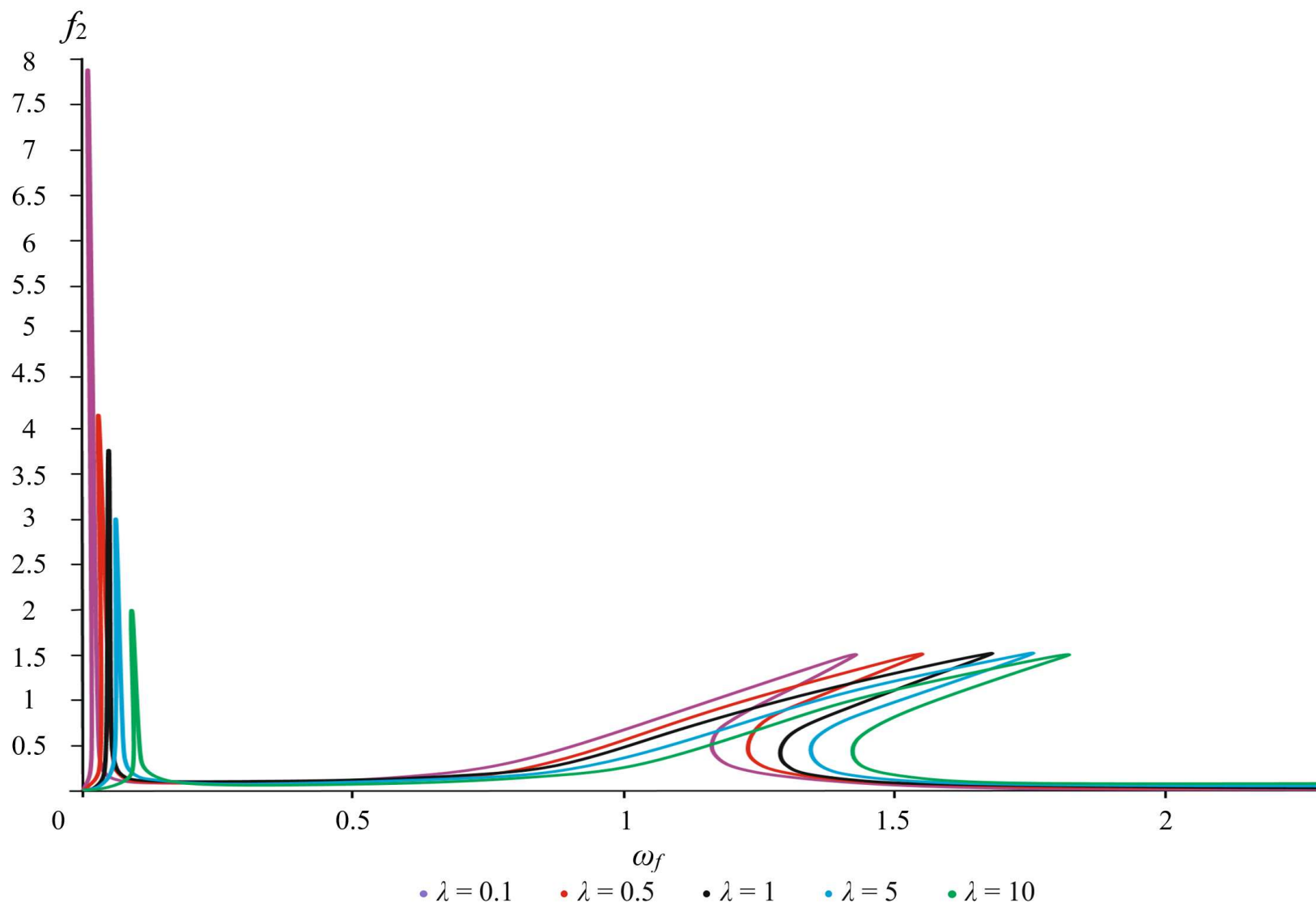
Сурет 33 – Ротор мен фундамент массасының әр түрлі қатынастары үшін ротордың АЖС-ы



Сурет 34 – Ротор мен фундамент массасының әр түрлі қатынастары үшін фундаменттің АЖС-ы



Сурет 35 – Сзықты қатаңдық коэффициентінің әр түрлі мәндері үшін ротордың АЖС-ы



Сурет 36 – Сызықты қатандық коэффициентінің әр түрлі мәндері үшін фундаменттің АЖС-ы

## 2.4 Қорытынды

Дереккөздер мен әдебиеттерді талдау барысында алынған нәтижелер келесідей қорытындылар жасауға мүмкіндік береді. Бұл жұмыста алғаш рет

– Якобидің эллиптикалық функциялары негізінде бейсызықты сипаттамаларға ие домалау мойынтіректеріндегі «ротор-фундамент» жүйесінің мәжбүрлі тербелістерінің жиіліктік сипаттамаларын тұрғызу және амплитудалардың максималды мәнін есептеудің жоғары дәлдікті әдістемесі жасалды.

– Фундаменттің массасына, сызықтық және бейсызық қатаңдық коэффициенттеріне, сондай-ақ демпферлеу коэффициенттеріне қатысты амплитудалардың оптимальді мәндерін қамтамасыз ететін қажетті параметрлер анықталды.

– Фундаменттің тербелістері орын алуы себепті көптеген еркіндік дәрежесі бар жүйенің ерекшеліктері көрсетілді.

### **3 ҰСАҚ ҚАТТЫ БӨЛШЕКТЕРДІҢ ВЕРТИКАЛЬ РОТОРЛЫҚ ЖҮЙЕДЕГІ СЕДИМЕНТАЦИЯ ҮДЕРІСІН ЗЕРТТЕУ**

Сепарация әдісі технология мен өнеркәсіптің көптеген салаларында кеңінен қолданылады. Ол әсіресе медицина, биология, химия өнеркәсібінде кеңінен қолданылады. Мысалы, кендер мен топырақ үлгілерінің материалдық құрамын зерттеу үшін олар көбінесе сепарацияға жүгінеді. Сепарация көмегімен суспензияда аз мөлшерде минералдардың концентрацияланған массасын алуға болады. Сепарация әдісі кендердегі минералдардың мөлшерін анықтауға, сонымен қатар топырақтың химиялық құрамын анықтауға және т. б. мүмкіндік береді. Жалпы алғанда, сепарация әдісі химиялық құрамды, минералдардың құрылымын, олардың физика-химиялық қасиеттерін және басқа да ерекшеліктерін зерттеуге қажет болып табылатын мономинералды фракцияларды бөлу үшін, сондай-ақ рентгендік және электронды дифракция, электронды зондты анализ және т. б. әдістермен сандық және сапалық талдауларға қажет сынамаларды алу үшін қолданылады.

Центрифугирлеу процестері технологияның ең күрделі процестеріне, ал центрифугалар ең күрделі технологиялық құрылғыларға жатады. Центрифугалардың жұмыс жасау теориясының барлық мәселелері жеткілікті түрде дамыған жоқ. Центрифугаларда гетерогенді жүйелердің бөлінуін нақты болжау әрдайым мүмкін бола бермейді. Центрифугалық техникада пайда болған жаңа тенденциялар центрифугалардың әртүрлі конструкцияларының пайда болуына әкелді, олардың кейбіреулерін белгілі есептеулер арқылы бағалау қиын.

Г.И. Бремердің, В. И.Соколовтың, П.Г. Романковтың, Н. Н. Липатовтың, Е. М. Голдиннің, Ю. Н. Бочковтың, С. А. Плюшкиннің, Е. В. Семеновтың, А.В. Шлаудың, В. М. Лукьяненконың, Л. Н. Хауардтың және т. б. еңбектерінде жинақталған осы машиналардың теориялық және эксперименттік зерттеулерінің негіздері центрифугалау процестерінің теориясын едәуір тереңдетті және жаңа эффективті центрифугалардың құрылуына ықпал етті.

Жоғарыда келтірілген авторлардың еңбектерінде көп жағдайда бөлшектердің тек пробирканың осі бойымен қозғалысы ескерілді, ал ротордың, сепарациялық стакандардың бұрыштық жылдамдығының шамасы және олардың көлбеу бұрышы тұрақты шамалар болып қарастырылды.

Біздің жағдайда бөлшектің кеңістіктік қозғалысы қарастырылады, мұнда қатты бөлшектерді сұйықтықтан бөліну үдерісін толық бағалау үшін сепарациялық стакандардың көлбеулік бұрышының, бұрыштық жылдамдығының шамалары уақытқа байланысты өзгермелі шамалар екенін ескеріледі, бұл жағдай бөлшектердің және тұтас механикалық жүйенің дифференциалдық қозғалыс теңдеулерінің жалпы шешімін табуды қиындатады.



### 3.1 Есептің қойылымы мен жүйенің қозғалыс теңдеулері

Ротор  $\omega$  бұрыштық жылдамдықпен айналатын иілгіш білікте негіздерге қатысты симметриялы орналасқан. Ротор айналу осымен белгілі бір қашықтыққа ілінген ішінде суспензиясы бар сепарациялық-стақандардан тұратын диск болып табылады.

Стақандар өздерінің көлденең осы бойымен айнала алады. Стақандардың вертикаль төмен бағытталған осьтен ауытқу-бұрылу бұрышы  $\alpha$  бұрышымен анықталады.  $\Omega$  – стақандардың бұрылуының бұрыштық жылдамдығы,  $L_{cm}$  – ротордың айналу осымен стақандардың аналу осыне дейінгі қашықтық.

Ротордың орналасуы  $O_1x_1y_1z_1$  қозғалмайтын координаттар жүйесі арқылы анықталады. Зерттелетін  $M$  бөлшектің орналасуы  $Oxuz$  қозғалмалы координаттар жүйесі арқылы анықталады.  $Oy$  осы стақан симметриясы бойымен төмен бағытталған,  $Oz$  осы стақандардың айналу осымен бағытталған.  $L_M$  – массасы  $m$  болып табылатын суспензия бөлшегіне дейінгі арақашықтық,  $r$  – сепарация стаканының радиусы,  $L$  – сепарация стаканының ұзындығы (37 және 38 суреттер).

Қозғалыс теңдеулерін құру кезінде келесі тұжырымдар жасалды:

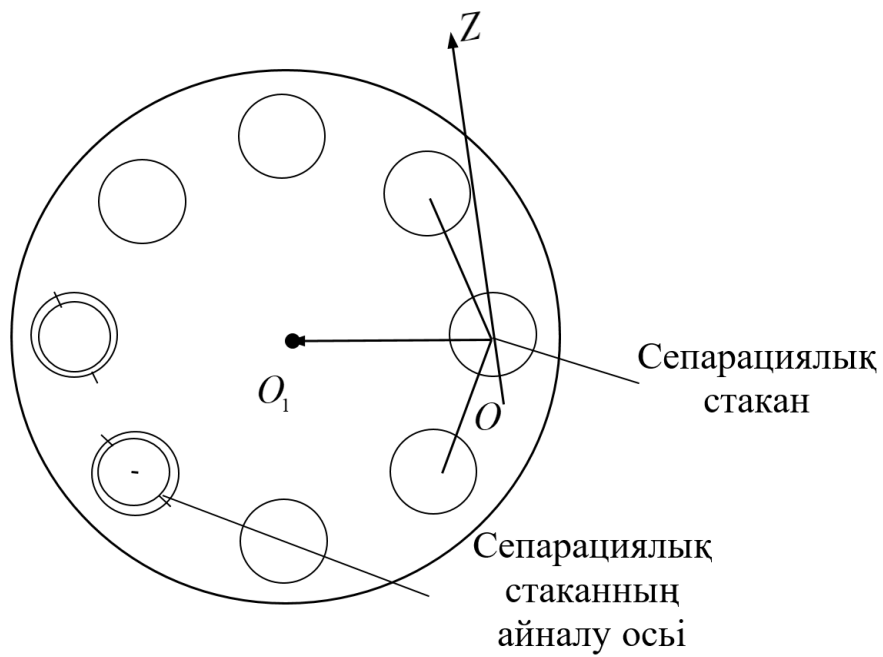
- 1) ротордың бұрыштық жылдамдығы ауырлық күшін ескермеуге болатындай жоғары ( $g \ll \omega^2 r$ );
- 2) бөлшектер сфералық пішінге ие;
- 3) бөлшектің еркін орын ауыстыруы оның өлшемдерінен әлдеқайда үлкен;
- 4) суспензияның турбулентті қозғалысы орын алмайды;
- 5) бөлшектердің өзара және стақан қабырғасымен әсерлесу күштері ескерілмейді;
- 6) стаканның диаметрі оның ұзындығынан әлдеқайда кіші;
- 7) стақан қабырғасына тұнған соң бөлшектер қозғалысы тоқтайды;
- 8) стақан пен оның айналу осы арасындағы үйкелісі, сондай-ақ суспензиялы стақан салмағының өзгерісі және бөлшектерің стақан қабырғасымен үйкелісі ескерілмейді.

Бөлшектің суспензиялы ортадағы қозғалысын сипаттайтын қозғалыс теңдеулерін қорыту үшін тасымал және кориолис инерция күштерін анықтау шарт. Бөлшектің тасымал үдеуі (56) түріндегі теңдеумен анықталады

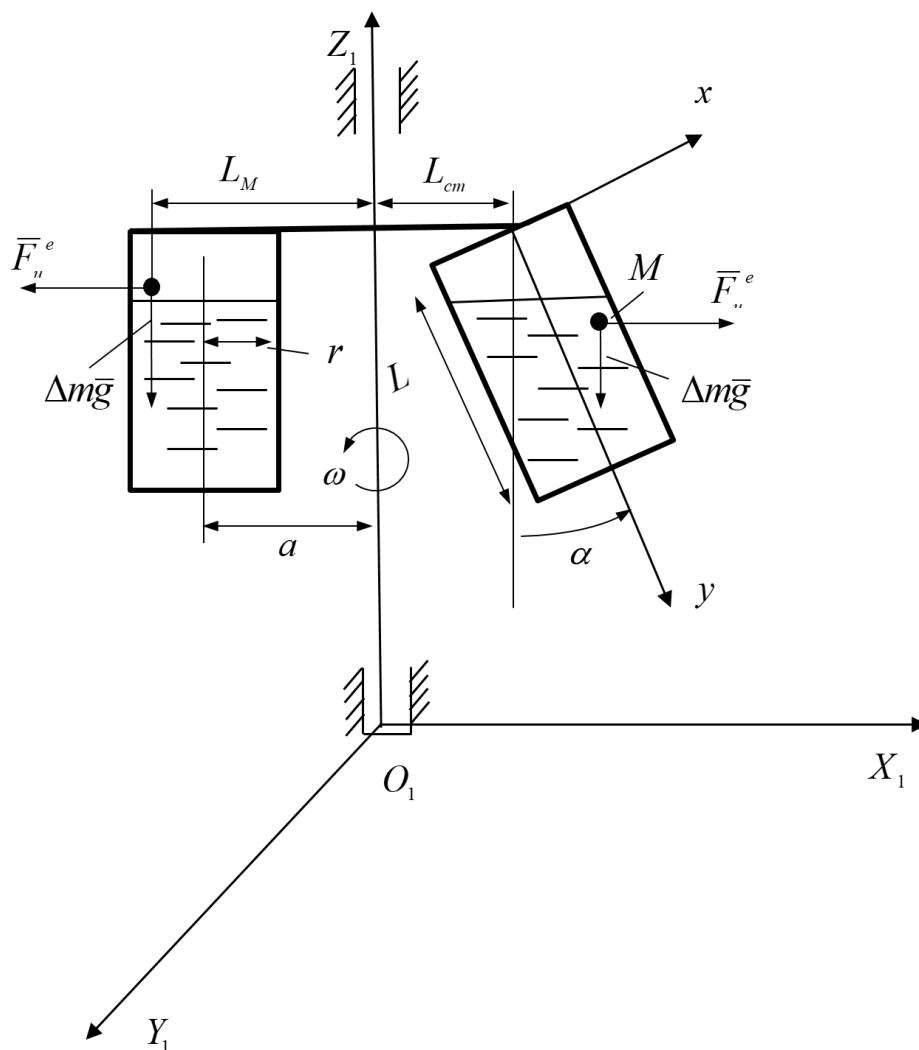
$$\bar{a}_e = \bar{\Omega}_0(\bar{\Omega}_0 \cdot \bar{r}) - \bar{r}\Omega_0^2 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \bar{\Omega}_0 = \bar{\omega} + \bar{\Omega}. \quad (56)$$

(56) теңдеу арқылы анықталатын тасымал үдеу векторын  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  қозғалмалы координаталар жүйесіне (57) түрінде проекцияласақ:

$$\begin{aligned} a_{ex} &= -(L_{cm} \cos \alpha + x)(\omega^2 + \Omega^2) + \omega^2 \sin \alpha (x \sin \alpha - y \cos \alpha) + \dot{\Omega}(L_{cm} \sin \alpha + y) - \dot{z}\omega \cos \alpha, \\ a_{ey} &= -(L_{cm} \sin \alpha + y)(\omega^2 + \Omega^2) - \omega^2 \cos \alpha (x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \dot{\Omega}(L_{cm} \cos \alpha + x) - \dot{z}\omega \sin \alpha, \\ a_{ez} &= \dot{\omega}(L_{cm} + y \sin \alpha + x \cos \alpha)(\omega^2 + \Omega^2) - 2\omega\Omega(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \dot{z}\omega^2. \end{aligned} \quad (57)$$



Сурет 37 – Сепарациялық стакандар орналасқан диск.



Сурет 38 – Сепарациялық стакандар орналасқан роторлық жүйенің схемасы.

Сәйкесінше бөлшектің кориолис үдеуі

$$\begin{aligned} a_{cx} &= -2(\dot{z}\omega \cos \alpha - \dot{y}\Omega), \\ a_{cy} &= -2(\dot{z}\omega \sin \alpha + \dot{x}\Omega), \\ a_{cz} &= 2\omega(\dot{y} \sin \alpha + \dot{x} \cos \alpha), \end{aligned} \quad (58)$$

Суспензия бөлшегінің кориолис және тасымал инерция күштерін анықтағаннан кейін суспензия бөлшегінің қозғалыс теңдеуі (59) түрінде болады

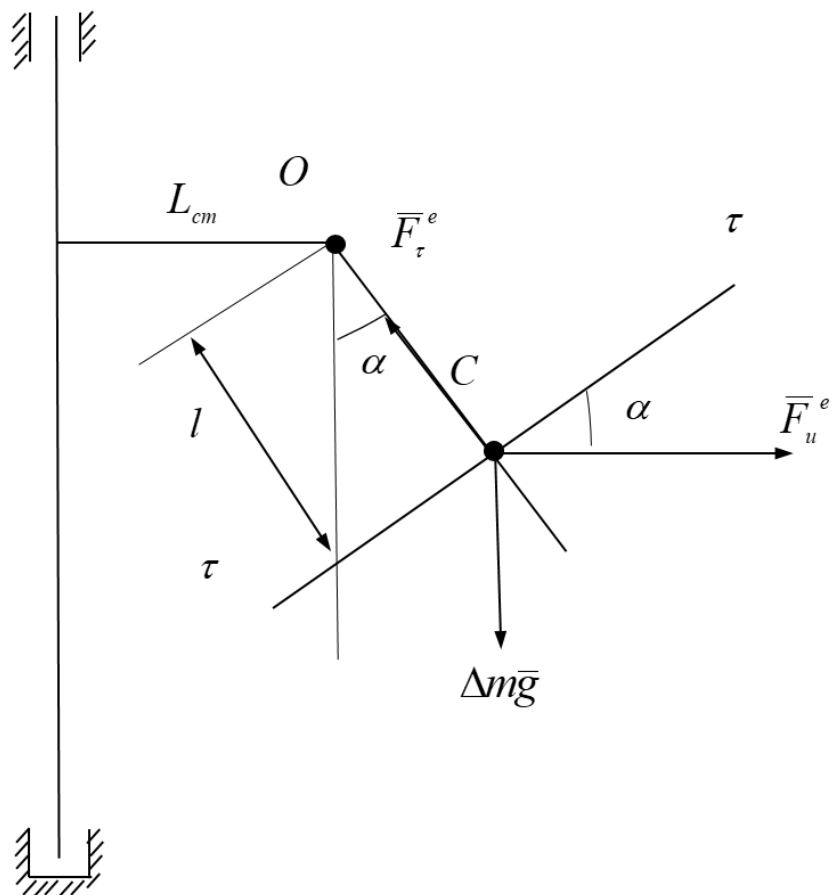
$$\begin{aligned} \ddot{x} + 6\pi\eta_1 r_0 \dot{x} &= -g \sin \alpha + (L_{cm} \cos \alpha + x)(\omega^2 + \Omega^2) - \omega^2 \sin \alpha (x \sin \alpha - y \cos \alpha) + z\dot{\omega} \cos \alpha - \\ &\quad - \dot{\Omega}(L_{cm} \sin \alpha + y) + 2(\dot{z}\omega \cos \alpha - \dot{y}\Omega), \\ \ddot{y} + 6\pi\eta_1 r_0 \dot{y} &= g \cos \alpha + (L_{cm} \sin \alpha + y)(\omega^2 + \Omega^2) + \omega^2 \cos \alpha (x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \\ &\quad - \dot{\Omega}(L_{cm} \cos \alpha + x) + 2(\dot{z}\omega \sin \alpha + \dot{x}\Omega) + z\dot{\omega} \sin \alpha, \\ \ddot{z} + 6\pi\eta_1 r_0 \dot{z} &= z\omega^2 + 2\Omega\omega(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \dot{\omega}(L_{cm} + y \sin \alpha + x \cos \alpha) - \\ &\quad - 2\omega(\dot{y} \sin \alpha + \dot{x} \cos \alpha), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\eta_1 = \frac{\eta}{\Delta m} = \frac{3\eta}{4\pi r_0^3 \rho_c} = \frac{3\nu\rho_{жс}}{4\pi r_0^3 \rho_c},$$

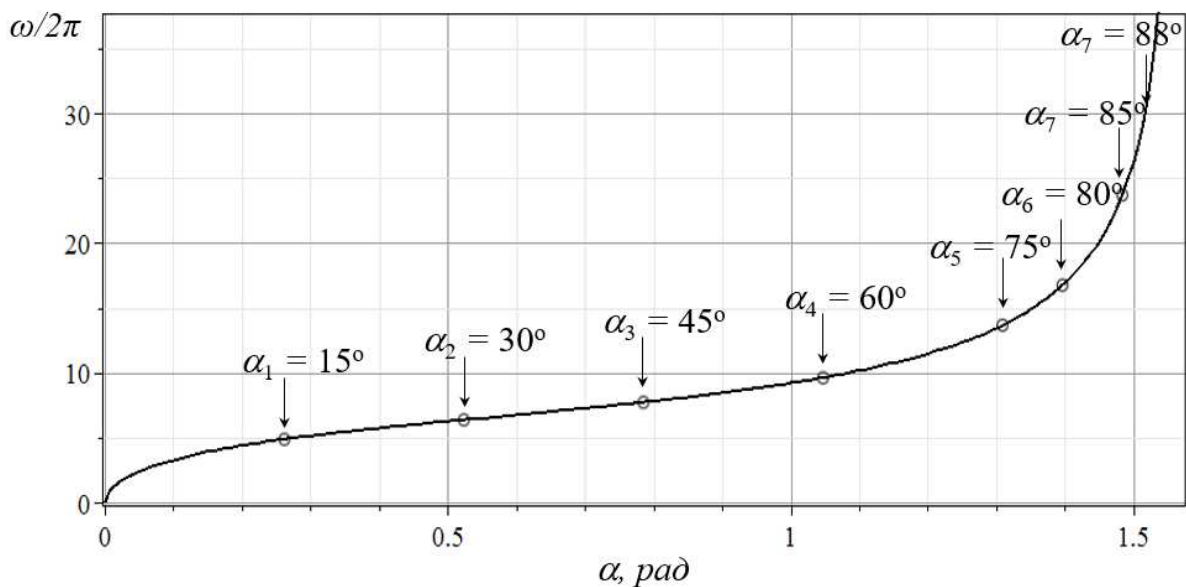
мұндағы  $r_0$  – массасы  $M$  болып табылатын бөлшектің радиусы;  $\rho_c$  – суспензиядағы қатты бөлшектің тығыздығы;  $\rho_{жс}$  – суспензияның тығыздығы;  $\nu$  – суспензияның кинематикалық тұтқырлығы;  $\eta = \rho_{жс}\nu$  – суспензияның динамикалық тұтқырлығы;  $6\pi\eta_1 r_0$  – қатты бөлшектің қозғалысы кезіндегі үйкеліс коэффициенті.  $\omega = \omega(t)$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $\Omega = \Omega(t)$  болуына байланысты (59) теңдеулер жүйесі бейсызық болып табылады. Сонымен қатар координаталар мен олардың туындыларының алдындағы коэффициенттер айнымалы болып табылады. Ротордың айналуы тұрақты жылдамдықпен орын алатын жағдайды қарастырайық, яғни  $\omega = \text{const}$ , ал  $\alpha \neq 0 = \text{const}$ , яғни  $\Omega = 0$ . Бұл жағдайда стаканға әсер ететін күштер тепе-теңдік теңдеуінен (39-сурет), стакандардың вертикаль төмен бағытталған осьтен ауытқу-бұрылу бұрышы мен ротордың бұрыштық жылдамдығының арасындағы байланысты сипаттайтын (60) түріндегі қатынасты аламыз:

$$g \sin \alpha = \omega^2 (L_{cm} + l \sin \alpha) \cos \alpha \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \cdot \text{tg} \alpha}{L_{cm} + l \sin \alpha}}. \quad (60)$$

(60) теңдеуден ротордың жылдамдығы тұрақты болса, стакандардың бұрылу бұрышыда тұрақты екенін, яғни ротордың әр бір бұрыштық жылдамдығына стаканның сәйкесінше бұрылу бұрышы тиісті екенін көре аламыз. Мысалға сепарациялық стакандардың көлбеулік бұрышы  $\alpha_1 = 15^\circ$  болған кезде, ротордың бұрыштық жылдамдығы  $\omega_1 = 30,5$  рад/с немесе 292 айн/мин құрайды.  $\alpha_2 = 30^\circ$  үшін 382 айн/мин,  $\alpha_3 = 45^\circ$  үшін 463 айн/мин (40-сурет).



Сурет 39 – Сепарациялық стаканға әсер ететін күштер тепе-теңдігі.



Сурет 40 – Сепарациялық стакандардың көлбеулік бұрышы мен бұрыштық жылдамдық арасындағы тәуелділік

Қалған көлбеулік бұрыштары үшін, яғни  $\alpha_4 = 60^\circ$ ,  $\alpha_5 = 75^\circ$ ,  $\alpha_6 = 80^\circ$ ,  $\alpha_7 = 85^\circ$ ,  $\alpha_8 = 88^\circ$  жағдайларында сәйкесінше бұрыштық жылдамдықтар 577 айн/мин, 820 айн/мин, 1005 айн/мин, 1422 айн/мин, 1640 айн/мин тең.

Ротордың айналу жылдамдығының артуымен бөлшектердің седиментация үдерісі де тезірек орын алады. Бірақ, жалпы жағдайда, роторлық жүйенің үлкен бұрыштық жылдамдықтарға дейін үдеуін болдырмау шарт болғандықтан, эмульсияның қатты бөлшектерін тұндыру шарттарын қанағаттандыратын сепарация стакандарының оптималды бұрышын және сәйкесінше тиісті айналу жылдамдығын анықтау есебі маңызды болып табылады.

Демек осылайша фиксацияланған бұрыштық жылдамдықпен айналатын ротор үшін (59)-теңдеуден (61) түріндегі қозғалыс теңдеулерін аламыз ( $\omega = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$ , демек  $\Omega = 0$  және  $\varepsilon = 0$ )

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{x} - \omega^2 \cos^2 \alpha \cdot x &= -g \sin \alpha + (L_s + y \sin \alpha)\omega^2 \cos \alpha + 2\omega \cos \alpha \dot{z}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{y} - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot y &= g \cos \alpha + (L_s + x \cos \alpha)\omega^2 \sin \alpha + 2\omega \sin \alpha \dot{z}, \\ \ddot{z} + 2n\dot{z} - \omega^2 z &= -2\omega(\dot{y} \sin \alpha + \dot{x} \cos \alpha). \end{aligned} \quad (61)$$

мұндағы  $2n = 6\pi\eta_1 r_0$  яғни  $n = \frac{9\nu}{4r_0^2} \frac{\rho_{жс}}{\rho_ч}$  – үйкеліс коэффициенті.

### 3.2 Қозғалыс теңдеулерінің шешімі

(61) теңдеудің аналитикалық шешімін табу үшін (61)-жүйенің бірінші теңдеуін  $\sin \alpha$  – қа, ал екінші теңдеуін  $\cos \alpha$  – ға көбейтіп біріншісінен екіншісін азайтсақ

$$\sin \alpha \cdot \ddot{x} - \cos \alpha \cdot \ddot{y} + 2n(\sin \alpha \cdot \dot{x} - \cos \alpha \cdot \dot{y}) = -g. \quad (62)$$

және

$$\sin \alpha \cdot \dot{x} - \cos \alpha \cdot \dot{y} = P \quad (63)$$

деп алсақ, онда

$$\sin \alpha \cdot \ddot{x} - \cos \alpha \cdot \ddot{y} = \dot{P}. \quad (64)$$

(64)-теңдеуді ол кезде

$$\dot{P} + 2nP = -g \quad (65)$$

түрінде жазуға болады. (65) теңдеудің шешімін

$$P = C_0 e^{-\alpha_0 t} - \frac{g}{2n} \quad (66)$$

түрінде іздейміз.

(66) ескеріп (63) теңдеуді интегралдайтын болсақ

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + \left( \frac{C_0}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 t} - k_0 t + C_1 \right) \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (67)$$

мұндағы  $\alpha_0 = 2n, k_0 = \frac{g}{2n}, C_0, C_1 - t = 0$  бастапқы шартынан анықталатын интеграл тұрақтылары. (67) теңдеуді (61) жүйенің бірінші теңдеуіне қоятын болсақ

$$\ddot{x} + \alpha_0 \dot{x} - \omega^2 x = \frac{\omega^2 \sin \alpha}{\alpha_0} C_0 e^{-\alpha_0 t} + 2\omega \cos \alpha \cdot \dot{z} + \omega^2 \sin \alpha \cdot k_0 t - \omega^2 \sin \alpha \cdot C_1 + a_0. \quad (68)$$

(61) жүйенің бірінші және үшінші теңдеуінің шешімдерін

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{-\beta_1 t} + B_1 e^{-\alpha_0 t} + B_2 t + B_0, \\ z &= E_1 e^{\alpha_1 t} + E_2 e^{-\beta_1 t} + P_1 e^{-\alpha_0 t} + P_2 t + P_3. \end{aligned} \quad (69)$$

түрінде іздейміз, мұндағы

$$\alpha_1 = -n + \sqrt{n^2 + \omega^2}, \beta_1 = n + \sqrt{n^2 + \omega^2}, a_0 = -g \sin \alpha + \omega^2 \cos \alpha \cdot L_{cm}.$$

Бұл жердегі алғашқы екі қосылғыш сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі болып табылса, соңғы үш қосылғыш біртекті емес теңдеудің дербес шешімі болып табылады. (69) және (67) теңдеулерді сәйкесінше (61) жүйесіне қойып, бірдей функциялар алдындағы коэффициенттермен бос мүшелерді теңестіру арқылы  $B_0, B_1, B_2, P_1, P_2, P_3$  белгісіздеріне қатысты (70) түріндегі алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз, яғни

$$\begin{aligned} B_0 &= \sin \alpha \cdot C_1 - L_{cm} \cos \alpha, \\ B_1 &= -\frac{\sin \alpha}{\alpha_0} C_0, \\ B_2 &= -\sin \alpha \cdot k_0, \\ P_1 &= P_2 = P_3 = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Демек осылайша (61)-теңдеудің аналитикалық түрдегі шешімі (71) түрінде болады

$$x = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{-\beta_1 t} - \frac{\sin \alpha}{\alpha_0} C_0 e^{-\alpha_0 t} - \sin \alpha \cdot k_0 t + \sin \alpha \cdot C_1 - L_{cm} \cos \alpha, \quad (71)$$

$$y = A_1 \operatorname{tg} \alpha \cdot e^{\alpha t} + A_2 \operatorname{tg} \alpha \cdot e^{-\beta t} + \frac{\cos \alpha}{\alpha_0} C_0 e^{-\alpha_0 t} + \cos \alpha \cdot k_0 t - \cos \alpha \cdot C_1 - L_{cm} \sin \alpha,$$

$$z = E_1 e^{\alpha t} + E_2 e^{-\beta t}.$$

Нольдік емес бастапқы шарттары кезінде  
 $(x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0, y = y_0, \dot{y} = \dot{y}_0, z = z_0, \dot{z} = \dot{z}_0)$   $A_1, A_2, C_0, C_1, E_1, E_2$  интеграл  
 тұрақтылары (47) түрінде анықталады

$$A_1 = \frac{b_1 \beta_1 + b_2}{2\sqrt{n^2 + \omega^2}},$$

$$A_2 = \frac{b_1 \alpha_1 - b_2}{2\sqrt{n^2 + \omega^2}},$$

$$C_0 = k_0 + \dot{x}_0 \sin \alpha - \dot{y}_0 \cos \alpha, \quad (72)$$

$$C_1 = \frac{k_0 + \dot{x}_0 \sin \alpha - \dot{y}_0 \cos \alpha}{\alpha_0} + x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha,$$

$$E_1 = \frac{z_0 \beta_1 + \dot{z}_0}{2\sqrt{n^2 + \omega^2}}, \quad E_2 = \frac{z_0 \alpha_1 - \dot{z}_0}{2\sqrt{n^2 + \omega^2}},$$

мұндағы

$$b_1 = x_0 \cos^2 \alpha + y_0 \cos \alpha \sin \alpha + L_{cm} \cos \alpha,$$

$$b_2 = \dot{x}_0 \cos^2 \alpha + \dot{y}_0 \cos \alpha \sin \alpha.$$

Енді (72) мен (71) ескере отырып суспензия қатты бөлшегінің қозғалыс заңдылығын, траекториясын, центрифугирлену уақытын (седиментация уақытын) және т.с.с. параметрлерін анықтауға болады. Седиментация орын алғаннан кейін бөлшектің жылдамдығы нөлге тең болады, яғни  $t = T, \dot{y} = 0$ .

$$y|_{t=T} = \alpha_1 A_1 \operatorname{tg} \alpha \cdot e^{\alpha T} - \beta_1 A_2 \operatorname{tg} \alpha \cdot e^{-\beta T} - \alpha_0 \cos \alpha \cdot C_0 e^{-\alpha_0 T} + \cos \alpha \cdot k_0 = 0.$$

Сонымен қатар  $\omega \gg n$  екенін, яғни экспотенциалды функциялардағы  $\sqrt{n^2 + \omega^2}$  салыстырғанда  $n$ -нің мардымсыз екенін ескерсек

$$\alpha_1 A_1 \operatorname{tg} \alpha \cdot e^{2\sqrt{n^2 + \omega^2} T} + (\cos \alpha \cdot k_0 - \alpha_0 \cos \alpha \cdot C_0) e^{\sqrt{n^2 + \omega^2} T} - \beta_1 A_2 \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

$e^{\sqrt{n^2 + \omega^2} T} = \xi$  белгілеуін енгізіп жоғарыдағы теңдеуден седиментация уақытын табуға мүмкіндік беретін (85) түріндегі квадрат теңдеуді аламыз, яғни

$$a \xi^2 + b \xi + c = 0, \quad (73)$$

мұндағы  $a = \alpha_1 A_1 \operatorname{tg} \alpha, b = \cos \alpha \cdot k_0 - \alpha_0 \cos \alpha \cdot C_0, c = -\beta_1 A_2 \operatorname{tg} \alpha$ . Бұл теңдеудің шешімі

$$\xi_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \xi_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$T_1 = \frac{\ln \xi_1}{\sqrt{n^2 + \omega^2}}, T_2 = \frac{\ln \xi_2}{\sqrt{n^2 + \omega^2}}$$

түрінде болады. Физикалық тұрғыдан біз үшін седиментация уақытының таңбасы оң болуы қажет екенін ескерсек, екі түбірден тек қана  $\xi_1 = \xi, T_1 = T$  қажет, демек седиментация уақыты онда

$$T = \frac{\ln \xi}{\sqrt{n^2 + \omega^2}}, \quad (74)$$

түрінде анықталады.

Осылайша кез-келген бастапқы шарттар жағдайында ұсақ қатты бөлшектердің седиментация уақытын аналитикалық түрде анықтауға мүмкіндік беретін қатынастар алынды.

### 3.3 Нәтижелер

Есептеу нәтижелері 41-51 суреттер және 1-3 кестелерде келтірілген. Есептеу барысында өнеркәсіпте ең маңызды болып табылатын стакандардың бұрылу бұрышы, ортаның кедергі коэффициенті және бөлшектердің радиусы сияқты үш негізгі параметр вариацияланады. Суретте стакандардың (пробиркалардың) көлбеулік бұрышының әртүрлі жағдайындағы суспензия бөлшегінің траекториясын есептеу нәтижелері көрсетілген (41-сурет).

Өнеркәсіпте қолданылатын центрифугалардың жылдамдығы әдетте 3000 айн/мин құрайды. Біздің жағдайда ол жылдамдықтар седиментация стакандарының (пробиркалардың) көлбеулік бұрышының  $80^\circ$ -тан үлкенірек жағдайларда орын алады. Көріп тұрғанымыздай  $80^\circ$ -тан үлкенірек жағдайларда седиментация үдерісі тезірек жүреді. Мысалы  $88^\circ$ -та (1640 айн/мин) седиментация 19 секундта орын алады (1-кесте).

Кесте 1 – Тұндырылудың сепарация стаканының көлбеулік бұрышынан тәуелділігі

Параметр	Шама							
	15	30	45	60	75	80	85	88
$\alpha$ , градус	15	30	45	60	75	80	85	88
$T$ , с	87	61	49	37	28	25	23	19

$88^\circ$ -тан үлкенірек жағдайларда (60)-өрнектен көріп тұрғанымыздай центрифуганың бұрыштық жылдамдығын арттыру үшін құрылысын өзгерту



кажет. Демек осылайша центрифугаларда седиментация үдерісі жеткілікті дәрежеде орын алуы үшін 3000 айн/мин міндетті болып табылмайды. Бұл белгілі бар центрифугалар үшін экономикалық шығындарды төмендететіні анық.

Бөлшектердің тұну жылдамдығы көп фазалы сұйықтықтың табиғатына да байланысты, сондықтан келесі маңызды параметр ретінде суспензия сұйықтығының кедергісін қарастырған жөн. Есептеу үшін шикі мұнай мен кейбір тұтқыр сұйықтықтар үшін кедергі коэффициенттері қолданылады. Кедергі коэффициенті неғұрлым жоғары болса, тұну үдерісі және бөліну уақыты соғұрлым ұзақ, сәйкесінше, кедергі коэффициенті неғұрлым төмен болса, бөлшектердің седиментация уақыты соғұрлым ұзарады, яғни ұсынылған математикалық модельдің дұрыстығын растайды (42-сурет). Бөлшектердің седиментация уақыттары сәйкесінше 2-кестеде келтірілген.

Кесте 2 – Тұндырылудың ортаның кедергісінен тәуелділігі

Параметр	$\alpha=88^\circ, r_0 = 0.005 \text{ m}$		
$\eta, \text{ кг/с}$	1000	5000	10000
$T, \text{ с}$	19	65	173

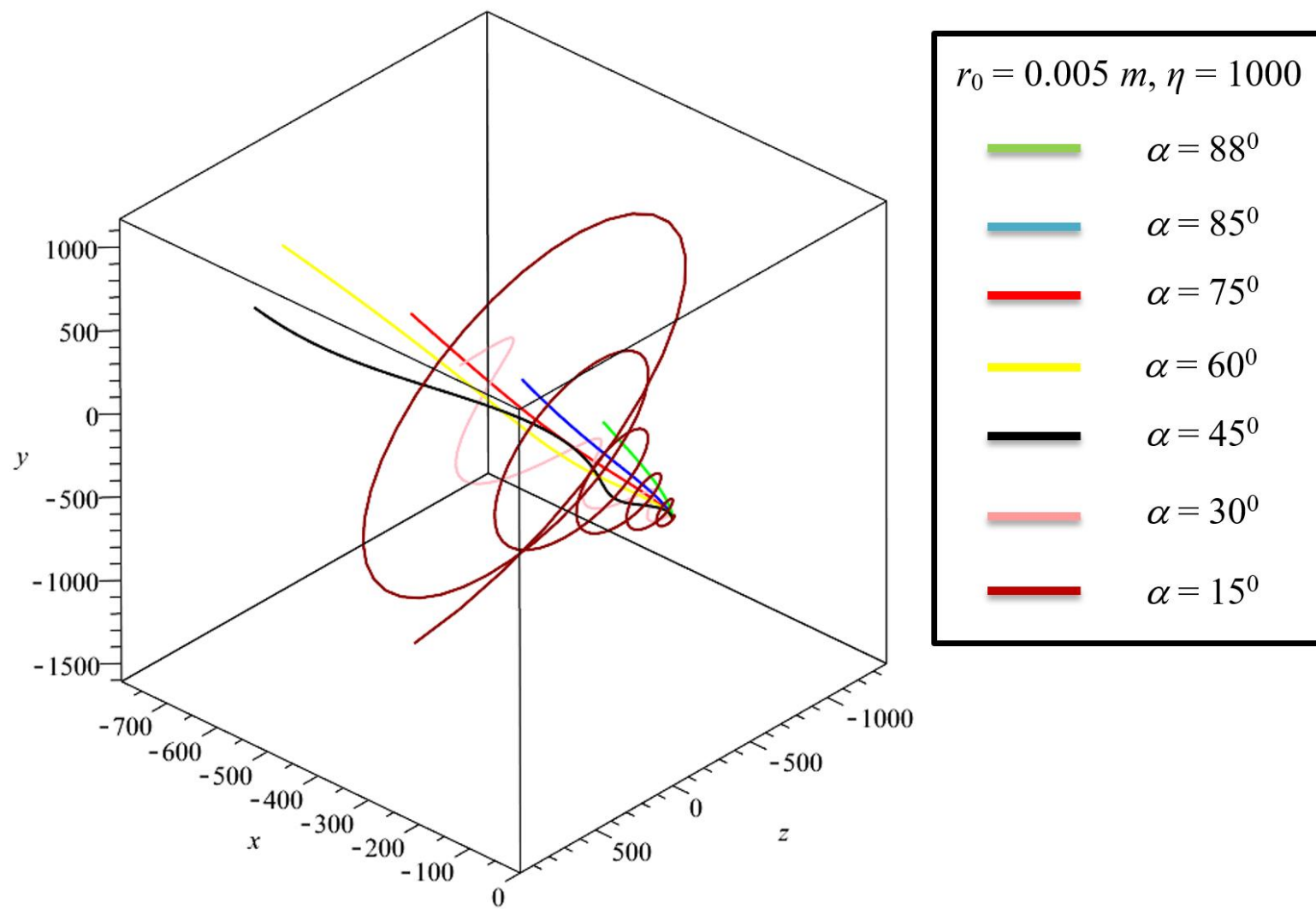
Пайда болған кедергінің шамасы негізінен қозғалыс режиміне және қатты бөлшектің пішініне байланысты. Қатты бөлшектердің тұну режимі  $Re < 1 \div 1,6$  шарты орындалғанға дейін ламинарлық деп қабылданады [72]. Центрифугирлеудің практикалық-өнеркәсіптегі жағдайларында Рейнольдс саны ламинарлық режимнен турбулентті режимге ауысу мәнінен аз болады.

Келесі маңызды параметр ретінде бөлшектердің радиусы алынды. Седиментация нәтижелері 3-кесте мен 43-суретте көрсетілген. Бөлшектердің пішіні сфера деп қабылданғасын, сәйкесінше бөлшектердің әртүрлі өлшемдерін қарастыру үшін олардың радиусы вариацияланды.

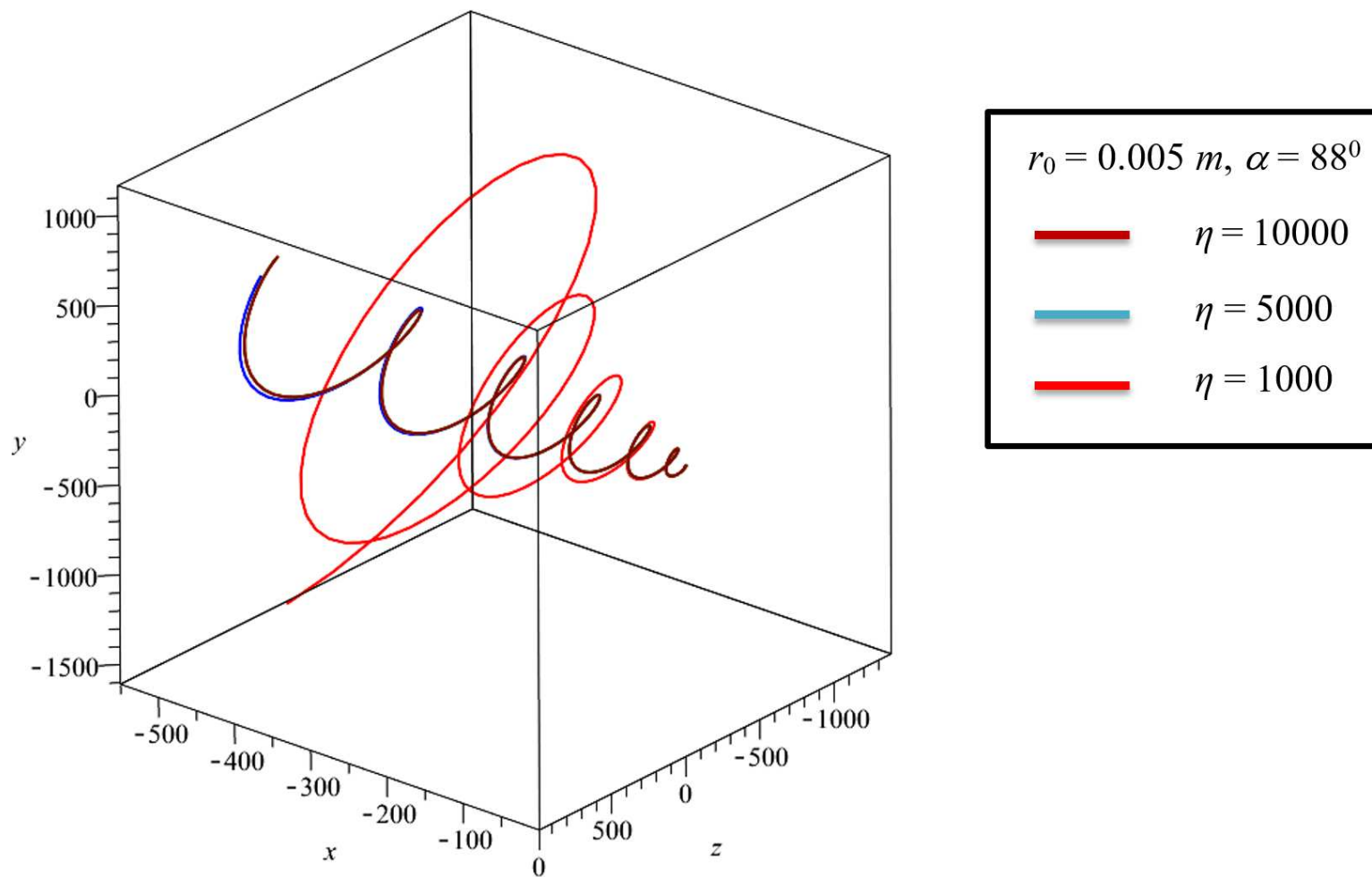
Кесте 3 – Тұндырылудың қатты бөлшектердің өлшемдерінен тәуелділігі

Параметр	$\alpha=88^\circ, \eta = 1000 \text{ кг/с}$			
$r_0, \text{ м}$	0.000001	0.005	0.05	0.01
$T, \text{ с}$	–	19	17	15

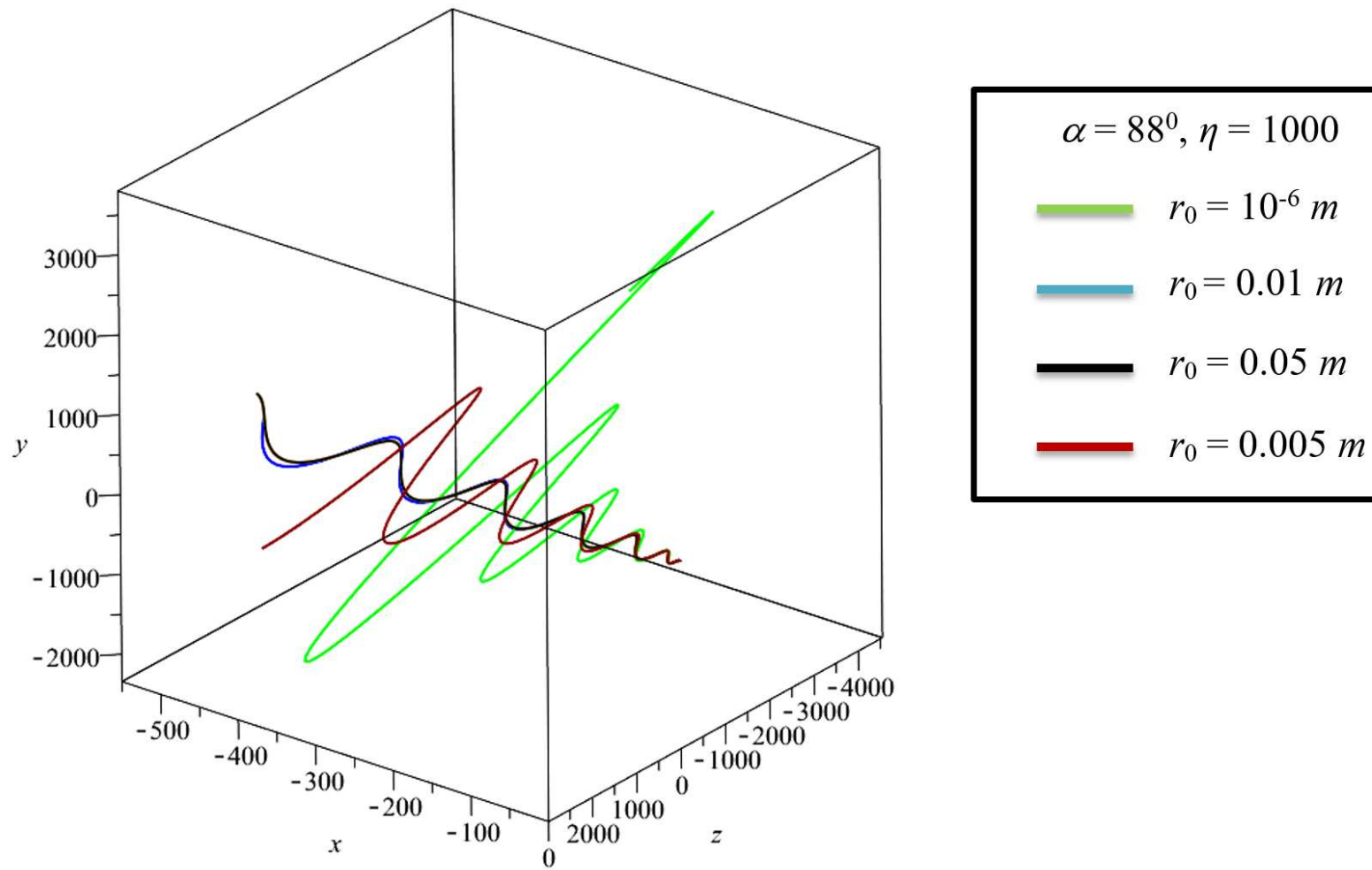
Бұл модельде жүйенің бір циклінде бөлшектердің өлшемдері тең болған жағдайы қарастырылды, яғни, әр жағдайда суспензиядағы барлық қатты фракциялар бірдей мөлшерде болды. Сонымен қатар коллоидтық дисперсті жүйелер де ескерілмейді, өйткені бөлшектердің белгілі бір өлшемдер диапазоны үшін бөлшектердің коллоидтылығы сепарация процесінде маңызды рөл атқармайды. Мысалы, өлшемі 1 см және одан үлкен бөлшектер ( $r_0 = 0.01-0.05$ ) бірдей қисық сызықты траектория бойымен тұнады. Өлшемі 5



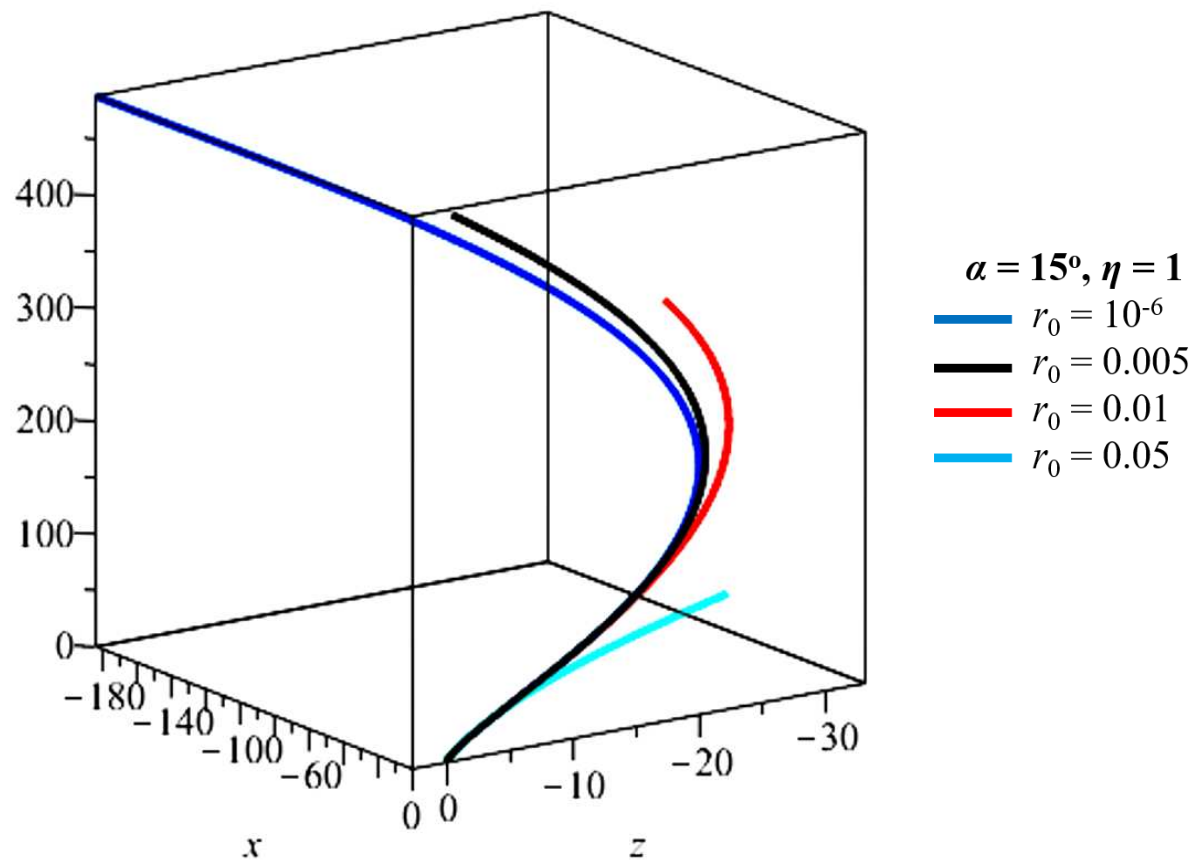
Сурет 41 – Қатты бөлшектің сепарация стаканы көлбеулік бұрышының әр түрлі мәніндегі қозғалысы.



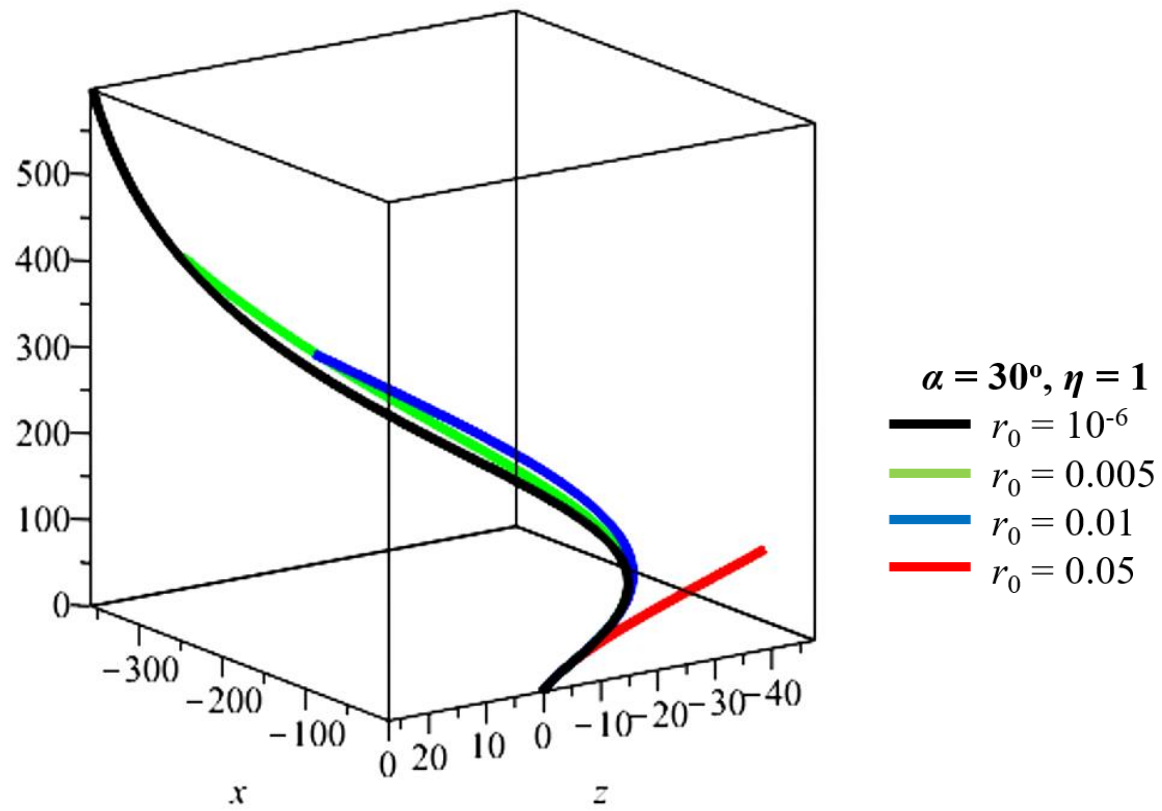
Сурет 42 – Қатты бөлшектің ортаның кедергі коэффициентінің әр түрлі мәніндегі қозғалысы



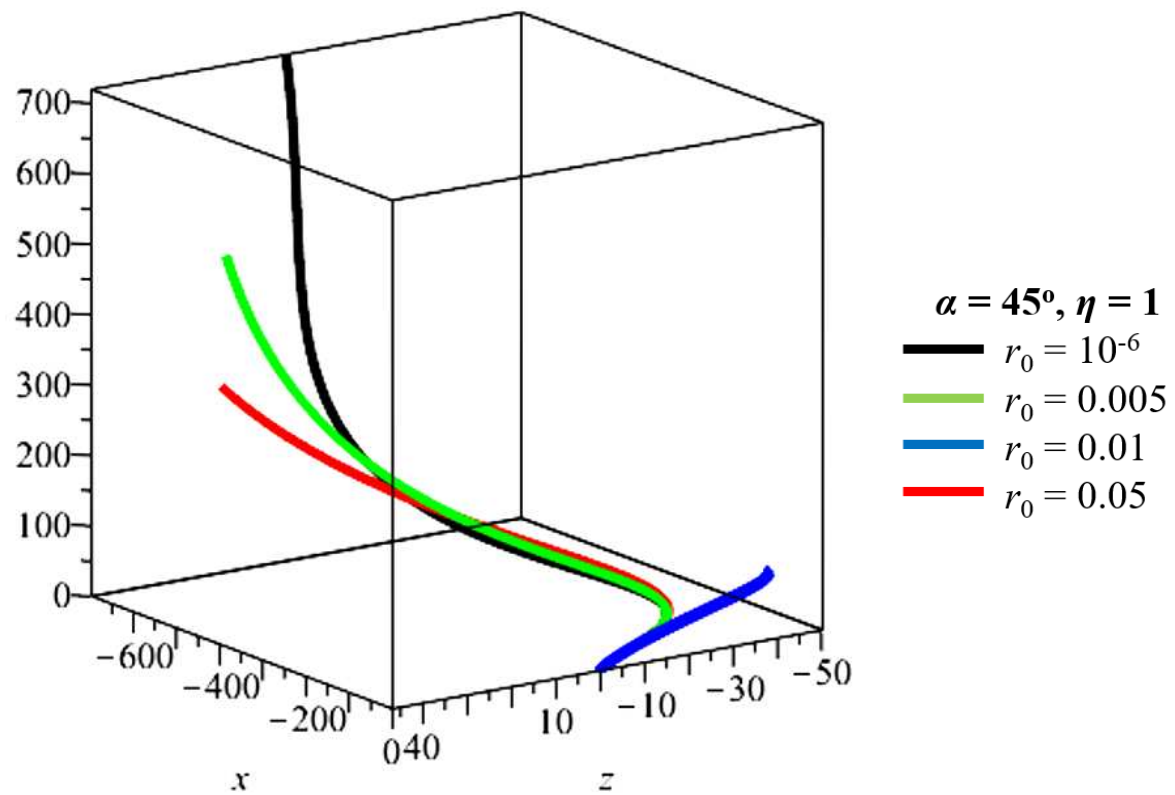
Сурет 43 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі қозғалыс



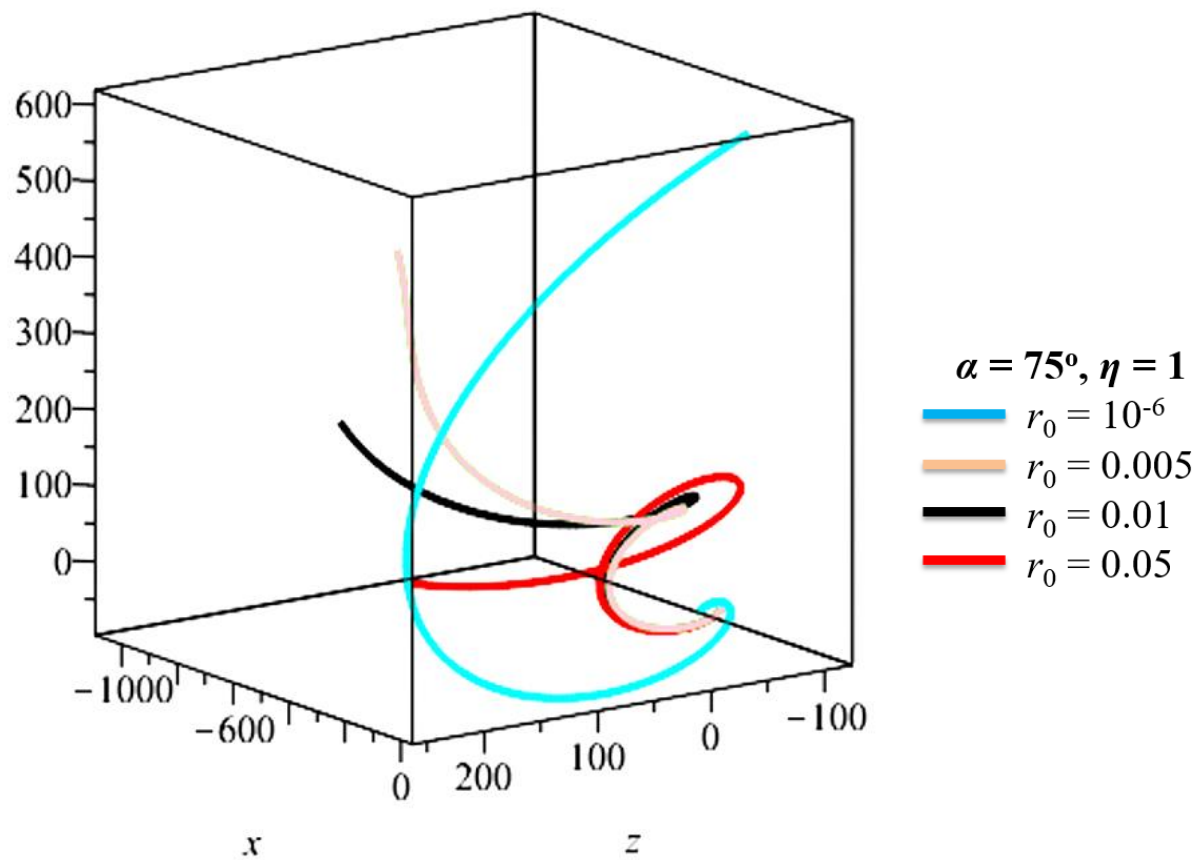
Сурет 44 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі  $\alpha=15^\circ$  және  $\eta = 1$  жағдайындағы қозғалысы



Сурет 45 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі  $\alpha=30^\circ$  және  $\eta = 1$  жағдайындағы қозғалысы

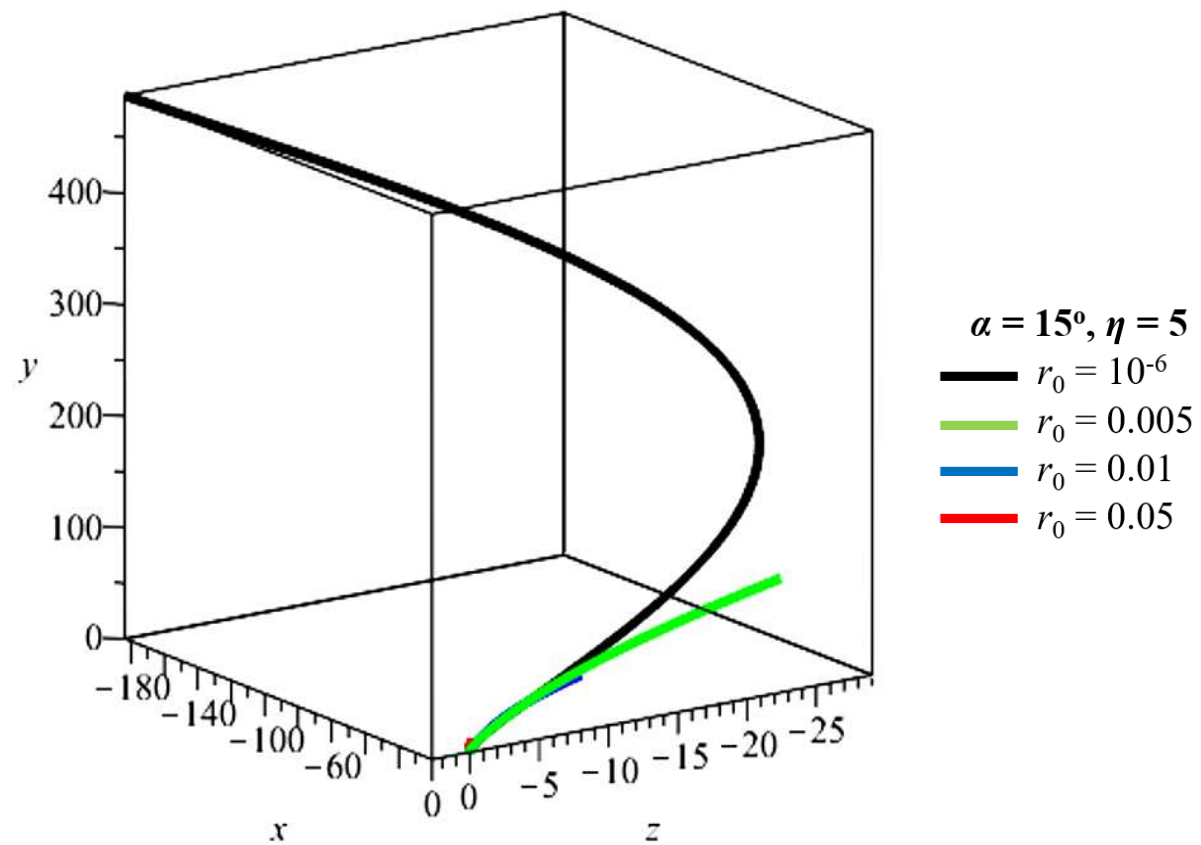


Сурет 46 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі  $\alpha=45^\circ$  және  $\eta = 1$  жағдайындағы қозғалысы

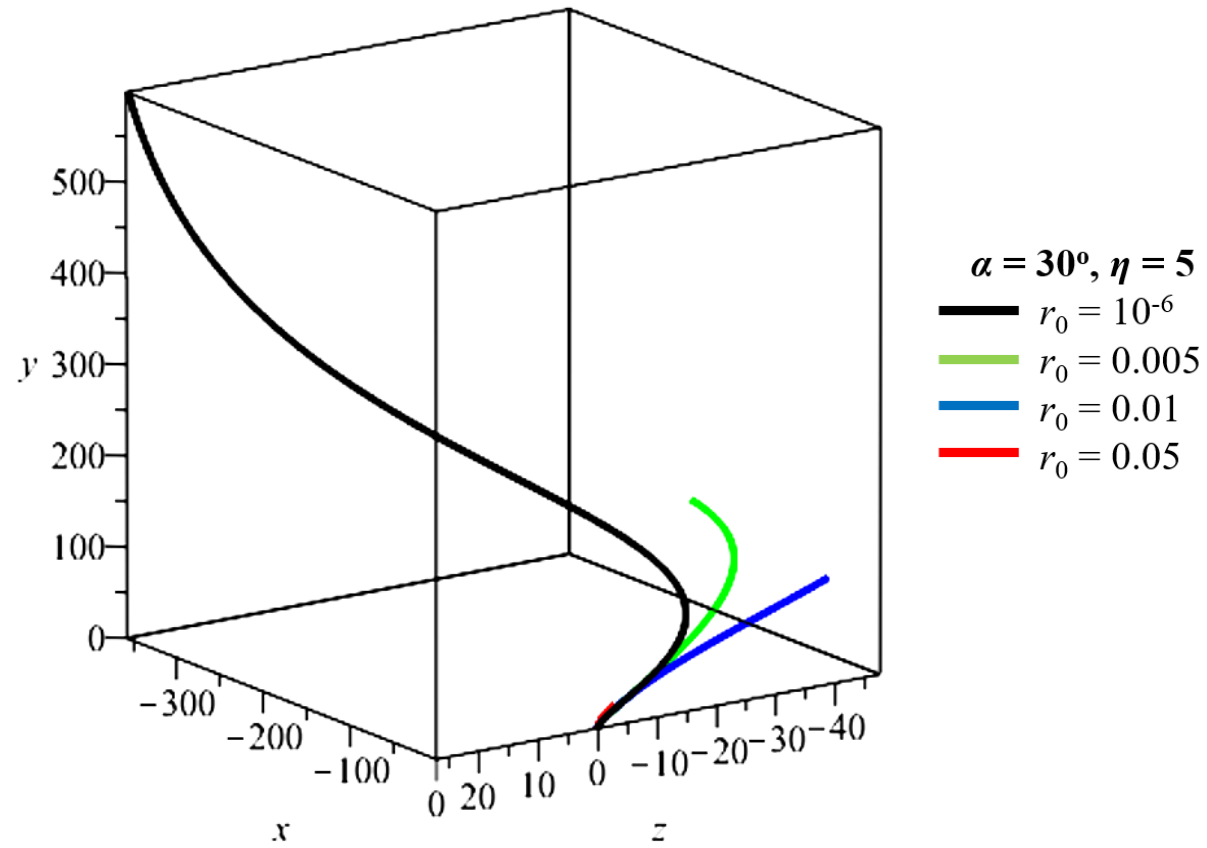


Сурет 47 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі  $\alpha=75^\circ$  және  $\eta = 1$  жағдайындағы қозғалысы

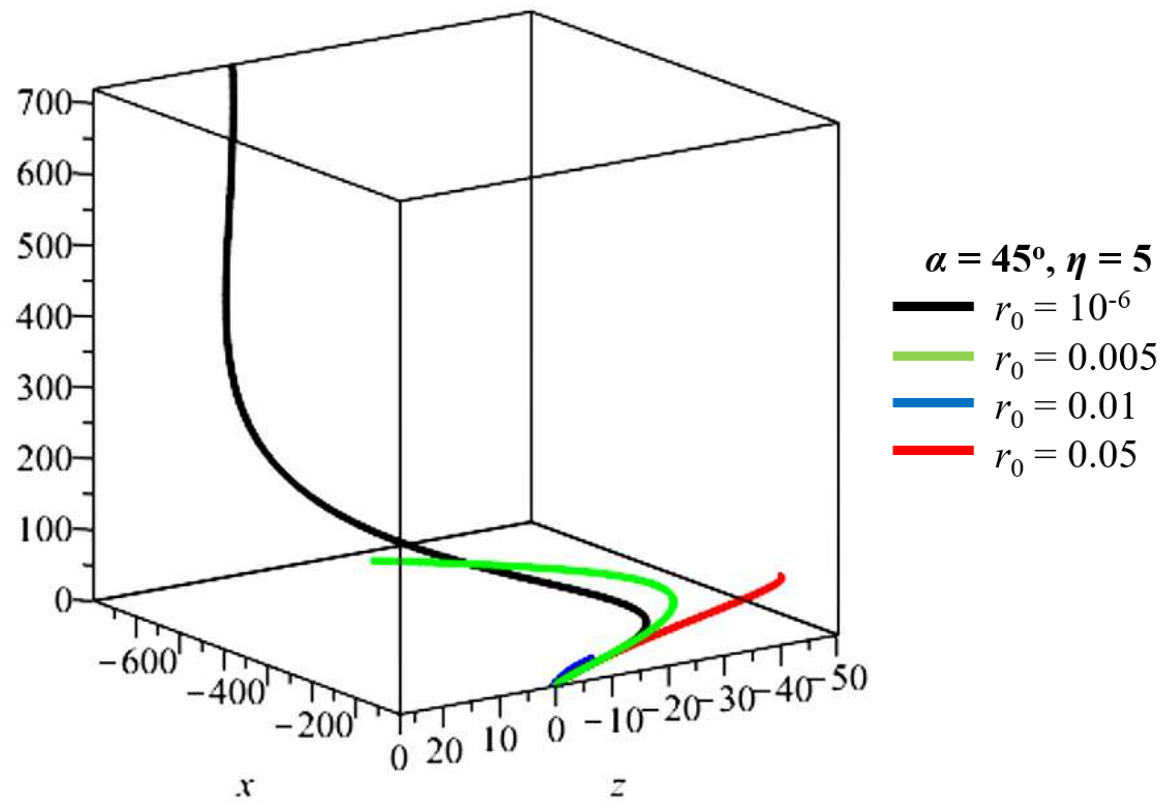




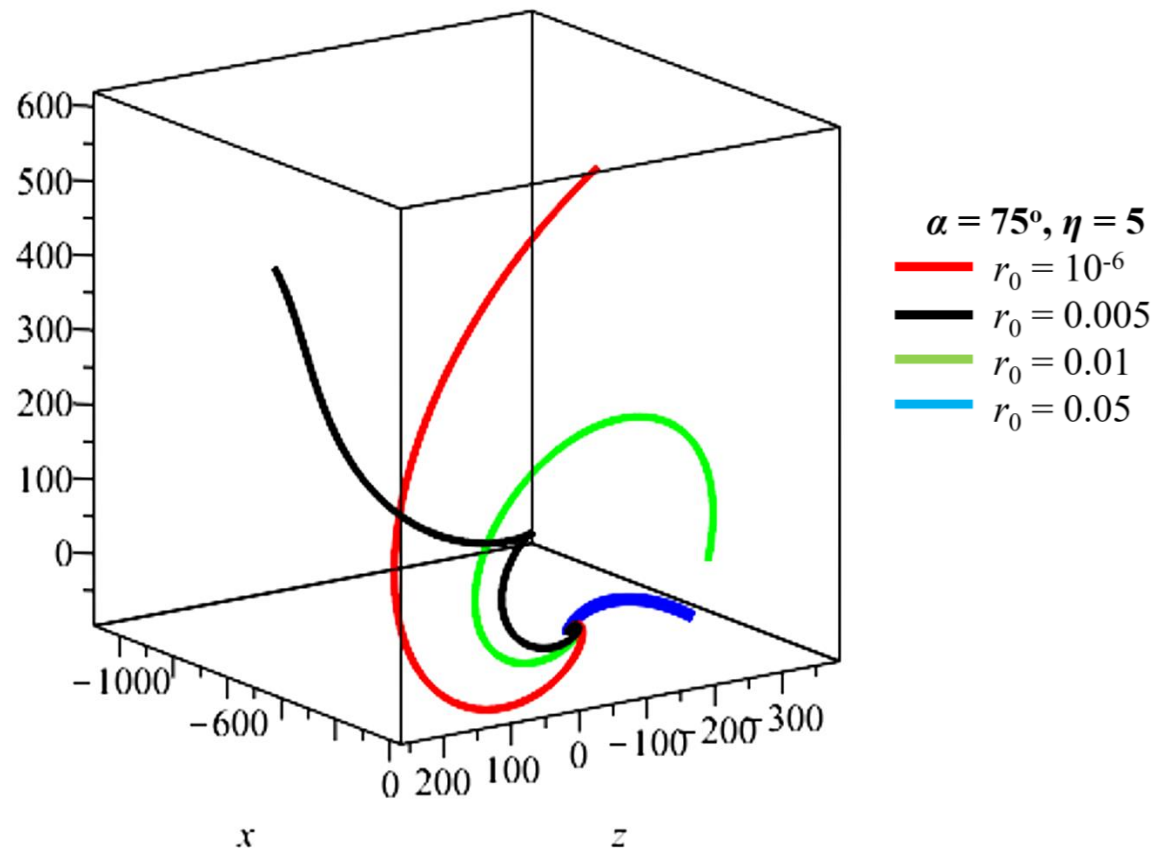
Сурет 48 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі  $\alpha=15^\circ$  және  $\eta = 5$  жағдайындағы қозғалысы



Сурет 49 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі  $\alpha=30^\circ$  және  $\eta = 5$  жағдайындағы қозғалысы



Сурет 50 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі  $\alpha=45^\circ$  және  $\eta = 5$  жағдайындағы қозғалысы



Сурет 51 – Қатты бөлшектің радиустары әр түрлі болған кездегі  $\alpha=75^\circ$  және  $\eta = 5$  жағдайындағы қозғалысы

мм немесе одан аз бөлшектер қаттырақ қисайған траекториялар бойынша ұзағырақ уақытта сепарацияланады. Бұл бөлшектер үшін бұл тұну қисықтары заңды, өйткені олар кішкентай, бұл микро және нанобөлшектер үшін центрифуганың жоғары жұмыс жылдамдығын қажет ететінін көрсетеді.

44-51 суреттерде сепарация үдерісінің көлбеулік бұрышының әр бір мәні үшін кедергі коэффициенті және бөлшектердің әр түрлі өлшемдері кезіндегі седиментация қисықтары көрсетілген. Сепарациялық стакандардың көлбеулік бұрышы  $15^\circ$  мәнінде жүйенің бұрыштық жылдамдығы 292 айн/мин құрайды. Бұл жағдайда сепарация және седиментация үдерісі  $r_0 = 0.005$  м өлшемді бөлшектері үшін 87 с-та орын алып (44 сурет, 1-кесте), жалпы жағдайда бөлшектердің өлшемдері ұлғаюымен седиментация уақытының азаю заңдылығы орын алады. Мысалы  $r_0 = 0.01$  м және  $r_0 = 0.05$  м жағдайларында бұл көрсеткіш сәйкесінше 51 және 36 с құрады. Бөлшектердің өлшемдері азаюмен, мысалы  $r_0 = 10^{-6}$  м жағдайында седиментация қисықтарының амплитудалары ұлғайып сәйкесінше сепарация уақыты 123 с дейін артады. Сепарация стакандарының көлбеулік бұрышының  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  және  $75^\circ$  шамаларында  $r_0 = 0.005$  м өлшемді бөлшектері үшін седиментация уақыты сәйкесінше 61 с, 49 с және 28 с құрады.  $r_0 = 0.01$  м жағдайында бұл көрсеткіш сәйкесінше 36 с, 29 с және 17 с,  $r_0 = 0.05$  м жағдайында 25 с, 20 с және 12 с,  $r_0 = 10^{-6}$  м жағдайында 86 с, 69 с және 39 с, құрады (46-48 суреттер).

Жоғарыда айтып кеткендей бөлшектердің өлшемдері ұлғаюымен седиментация уақытының азаю заңдылығы физикалық тұрғыдан орынды құбылыс, себебі микро және нанобөлшектер үшін жүйе жоғары жұмыс жылдамдықтарында жұмыс жасауы шарт. Мысалы ультрацентрифугалар 100 нм-ден кіші бөлшектерді сепарация және сәйкесінше седиментациялауы үшін 100000g (200 айн/сек) центрден тепкіш үдеуін тудыруы қажет. Демек бұл конфигурациядағы роторлық жүйелер үшін суспензияның дисперстік құрамы, яғни қатты бөлшектердің орташа өлшемі жүйенің өнімділігін, басқаша айтқанда суспензияны сепарациялау сапасын сипаттайтын бас параметр болып табылады.

Ортаның кедергі коэффициенті артуымен седиментация уақыты ұлғаяды (48-51 суреттер). Мысалы сепарациялық стакандардың көлбеулік бұрышы  $15^\circ$  мәнінде седиментация үдерісі  $r_0 = 0.005$  м өлшемді бөлшектер үшін 297 с-та орын алады (48-сурет).  $r_0 = 0.01$  м,  $r_0 = 0.05$  м және  $r_0 = 10^{-6}$  м жағдайларында бұл көрсеткіш сәйкесінше 174 с, 123 с және 421 с құрады.

Көлбеулік бұрышының  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  және  $75^\circ$  шамаларында  $r_0 = 0.005$  м өлшемді бөлшектері үшін седиментация уақыты сәйкесінше 209 с, 168 с және 96 с болды.  $r_0 = 0.01$  м жағдайында бұл көрсеткіш сәйкесінше 123 с, 99 с және 58 с,  $r_0 = 0.05$  м жағдайында 85 с, 68 с және 41 с,  $r_0 = 10^{-6}$  м жағдайында 294 с, 236 с және 133 с, құрады (49-51 суреттер).

Тұну үдерісіндегі бөлшек, айналу осінен белгілі бір қашықтыққа жетіп, одан әрі тұну кезінде оған тұрақты центрден тепкіш инерция күші әсер етуін жалғастыра берсе, онда бөлшектің жылдамдығы артуы салдарынан кедергі күшінің ұлғаюы центрден тепкіш инерция күшімен теңгерілуі себепті,

бөлшектердің тұну жылдамдығы көп ұзамай тұрақты болуы шарт. Бірақ іс жүзінде бөлшектердің центрден тепкіш инерция күші әрқашан тұтас ортаның кедергі күшінен үлкен болады, бұл денемен шекаралық қабаттағы сұйық молекулалардың «тығыздалуына» және сол себепті олардың арасындағы қашықтықтың азаюына байланысты өзара тебілу энергиясының артуына, ол болса өз кезегінде кедергі күшіне центрден тепкіш инерция күштері сияқты қарқынмен артуына жол бермейді.

Алынған нәтижелердің ЭЕМ-да есептеу алгоритмі  $\Gamma$  қосымшасында келтірілген.

### **3.4 Қорытынды**

– Дифференциалдық теңдеулерді шешу мақсатында қолданылған аналитикалық әдіс негізінде нәтижелерге сапалық талдау жүргізілді.

– Сепарация стаканының көлбеулік бұрышы, ортаның кедергі коэффициенті және бөлшектің өлшемі әртүрлі болған кездегі кеңістіктегі қозғалыс барысында бөлшектің тұну уақытына бағалау жұмыстары жүргізілді.

– Фиксацияланған ротор жағдайы үшін жұмыс режимдерінің оңтайлы параметрлері көрсетілді, яғни әрбір сепарация стаканының әрбір көлбеулік бұрышына нақты бір иілгіш біліктегі дискінің бұрыштық жылдамдығы сәйкес келетіні анықталды.

Инженерлік тәжірибе үшін жеткілікті дәлдікпен алынған тәуелділіктер үдерістің седиментация уақыты, тұнба түзу траекториясы және айналу жылдамдықтарының көлбеулік бұрышынан тәуелділігі сияқты жұмыс сипаттамаларын анықтауға, сондай-ақ, центрифуга жұмысының тиімділігін болжауға мүмкіндік береді. Бұдан басқа, бұл нәтижелер седиментометриялық әдісті қолдану және қосымша шығынды тәжірибелік жұмыстарды жүргізу қажеттілігінен арылтады.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Ұсынылған жұмыста сипаттамасы бейсызық болып табылатын серпімді тіректердегі «ротор-сұйықтық-фундамент» жүйесінің жалпыланған динамикалық моделі жасалды. Жүйенің меншікті және мәжбүрлі тербелістерінің амплитудасын анықтау әдістемесі дайындалды. Критикалық және резонанстық жиіліктер, сондай-ақ суб және ультрагармоникалық резонанстардың жиіліктері анықталды. Фундаменттің қозғалысын ескерген кездегі байланысқан «ротор-сұйықтық-фундамент» жүйесінің ерекшеліктері көрсетілді. Амплитудалардың оптимальді мәндерін қамтамасыз ететін теңгерімсіздік, фундаменттың массасы, ротор қуысындағы сұйықтық мөлшері, қатандық және демпферлеу коэффициенттерінің шамалары анықталды. Өндірісте маңызды болып табылатын, жүйенің тербелістер амплитудасының мәндерін шамасы жағынан шектейтін өздігінен центрлену құбылысы орын алатын жағдайлар мен одан туындайтын салдар анықталды. Орындалған жұмыстардың нәтижелері есептің физикалық мағынасын дәлелдейді, ал бұл өз кезегінде осы математикалық модельді өндіріске енгізу және қолдану үшін негіз бола алады. Ротордың қауіпті тербелістерін жүйенің параметрлерін таңдау әдісімен өшіру экономикалық тұрғыдан тиімді және техникалық тұрғыдан оңай жүзеге асырылады. Жұмыс нәтижелері аз шығындармен инженерлік және есептеу эксперименттерін жүргізуге, сапалық және сандық сипаттамаларды беруге және жаңа вертикаль роторлық машиналарды жобалау уақытын қысқартуға, олардың жұмысының сапасы мен қауіпсіздігін арттыруға мүмкіндік береді.

**Қойылған есептер шешімдерінің толықтығын бағалау.** Диссертациялық жұмыста жасалған зерттеу жұмыстарының нәтижесінде ротор-сұйықтық-қозғалмалы фундамент жүйесінің кіші меншікті және мәжбүрлі тербелістер орын алатын жағдайлары үшін динамикалық және математикалық модельдері жасалды. Жұмыста Герцтың теориясына негізделген бейсызық модельдерді зерттеу үшін комплексті амплитудалар, гармоникалық баланс және Якобидің эллиптикалық функциялар әдістері қолданылған. Есептеу барысында жүйеге параметрлік анализ жасалып жұмыс нәтижелері әдеби жолу мен сызықты модельдердің нәтижелерімен салыстырылып, сонымен қатар отандық және шетелдік кеңесші, шетелдік әріптестердің оң бағасын алып бірнеше ғылыми баспада жарияланды. Алынған нәтижелер мен сарапшылардың оң бағасы диссертациялық жұмыста қойылған барлық міндеттердің орындалғанын және зерттеу мақсатына қол жеткізілгенін растайды.

**Алынған нәтижелерді пайдалану бойынша ұсыныстар.** Тіректердің бейсызық қасиеттерін ескеретін роторлық жүйелер қозғалысының математикалық модельдері мұнай өңдеу өнеркәсібінде, жеңіл өнеркәсіпте, медицина, сондай-ақ қазіргі заманғы ғылыми әдістер тұрғысынан инженерлік деректерді нақтылау және қауіпті қозғалыс режимдерін болдырмау үшін сепарациялық құрылғыларды пайдаланатын басқа салаларда кеңінен практикалық қолданыс таба алады.

**Зерттелген саладағы үздік жетістіктермен салыстырғанда орындалған жұмыстың ғылыми деңгейі.** Диссертациялық жұмыс бейсызық дифференциал теңдеулерді шешуге бағытталған классикалық сандық әдістер мен апробацияланған аналитикалық әдістерді қолдана отырып, жоғары ғылыми деңгейде орындалды. Роторлық жүйелердің қозғалысын модельдеу есептеріне қатысты бейсызық тербелістер теориясының күрделі математикалық аппаратын қолдану роторлық жүйелердің зерттеу әдіснамасына жаңалық әкеледі. Жұмыс зерттеліп отырған саладағы үздік жетістіктер деңгейінде орындалды. Жоғарыда айтылғандарға байланысты осы диссертациялық жұмыстың нәтижелері бәсекеге қабілетті, заманауи ғылыми деңгейде орындалған және оларды ҚР-дағы құрылғы мен жабдықтарды жаңғырту мақсатында іс жүзінде қолдану мүмкіндігімен нақты жағдайларға барынша бейімделген болып табылады.



## ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Rao J. History of Rotating Machinery Dynamics. – Springer Science: Business Media B.V., 2011. – 380 p.
- 2 Блехман И.И., и др. Вибрации в технике: в 6 т. – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. – 351 с.
- 3 Tondl A. Some problems of rotor dynamics. – London: Chapman and Hall, 1965. – 434 p.
- 4 Adams M.L., Rotating machinery vibration., – NY: Marcel Dekker. 2001. – 354p.
- 5 Yamamoto T., Ishida Y. Linear and nonlinear rotordynamics: A Modern Treatment with Applications. – New York: John Willey and Sons, 2012. – 474 p.
- 6 Muszynska A. Rotordynamics. – Boca Raton: Taylor&Francis, 2005. – 1054 p.
- 7 Genta, G., Dynamic Modeling of Rotors: A Modal Approach //IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics. – Springer, Dordrecht, 2011. – С. 27-38.
- 8 Campbell W. Protection of steam turbine disk wheels from axial vibration. – General electric Company, 1924. – 160 p.
- 9 Lee C. W. Evolution of Frequency-Speed Diagram in Rotating Machinery //IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics. – Springer, Dordrecht, 2011. – P. 39-50.
- 10 Greenhill L. M., Cornejo G. A. Critical speeds resulting from unbalance excitation of backward whirl modes //International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. – American Society of Mechanical Engineers, 1995. – Vol. 97652. – P. 991-1000.
- 11 Arakere N., Schmitz T., Cheng C. Rotor dynamic response of a high-speed machine tool spindle //Proceedings of the 23rd International Modal Analysis Conference. – 2005. – Т. 30.
- 12 Lesaffre N., Sinou J. J., Thouverez F. Model and stability analysis of a flexible bladed rotor //International Journal of Rotating Machinery. – 2006. – Vol. 2006. – P.1–16.
- 13 Ehrich F. F. Observations of nonlinear phenomena in rotordynamics //Journal of system design and dynamics. – 2008. – Vol. 2, № 3. – P. 641-651.
- 14 Pasynkova, I.A. Dynamics of the precession motion of an unbalanced rotor: dis. for a job. scientific step. Dr. Phys.-Math. Sciences: 02/01/01. – SPb, 2007. –31 p.
- 15 Avramov K. V. Asymptotic analysis of the forced vibrations of a one-disc rotor on a non-linear flexible base // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2010. – Vol. 224, № 8. – P. 1593-1604.

- 16 Leontiev, M.K., Karasev, V.A., Potapova, O.Yu., Degtyarev, S.A., Leontiev, M.K.: The dynamics of the rotor in rolling bearings// *Vibration of machines: measurement, reduction, protection.* – 2006. – Vol. 4, № 7. – P.40–45.
- 17 Taranenkov, P.A. Dynamics of a rotor of a turbocompressor on sliding bearings with floating bushes: dis. for a job. scientific step. Cand. tech. Sciences: 02/01/06. – Chelyabinsk, 2011. – 19 p.
- 18 Sharma, A., Upadhyay, N., Kankar, P. K., Amarnath, M. Nonlinear dynamic investigations on rolling element bearings: A review // *Advances in Mechanical Engineering.* – 2018. – Vol. 10, № 3. – P. 1–15.
- 19 Kumar Vashisht R., Peng Q. Nonlinear Dynamic Modeling of the Cracked Rotor Ball Bearing System with Emphasis on Damage Detection Capabilities // *Journal of Vibration and Acoustics.* – 2018. – Vol. 140, № 4, – P. 1–10.
- 20 Li Z., Li J., Li M. Nonlinear dynamics of unsymmetrical rotor-bearing system with fault of parallel misalignment // *Advances in Mechanical Engineering.* – 2018. – Vol. 10, №. 5. – P. 1–17.
- 21 Xu, Q., Niu, J., Yao, H., Zhao, L., Wen, B. Nonlinear dynamic behavior and stability of a rotor/seal system with the dynamic vibration absorber // *Advances in Mechanical Engineering.* – 2019. – Vol.11, №. 1. – P. 1–17.
- 22 Nan, G., Tang, M., Chen, E., Yang, A. Nonlinear dynamic mechanism of rolling element bearings with an internal clearance in a rotor-bearing system // *Advances in Mechanical Engineering.* – 2016. – Vol.8, №. 11. – P. 1–9.
- 23 Ishida Y., Liu J. Elimination of unstable ranges of rotors utilizing discontinuous spring characteristics: an asymmetrical shaft system, an asymmetrical rotor system, and a rotor system with liquid // *Journal of vibration and acoustics.* – 2010. – Vol. 132, №. 1. – P. 1–8.
- 24 Xia, Z., Qiao, G., T. Zheng, W. Zhang. Nonlinear modeling and dynamic analysis of the rotor-bearing system // *Nonlinear Dynamics.* – 2009. – Vol. 57, №. 4. – P. 559-577.
- 25 Łuczko J. A geometrically non-linear model of rotating shafts with internal resonance and self-excited vibration // *Journal of sound and vibration.* – 2002. – Vol. 255, №. 3. – P. 433-456.
- 26 Penny, J., Friswell, M., Garvey, S., Lees, A. Dynamics of rotating machines. – Cambridge university press, 2010. – 380 p.
- 27 Vance J. M., Zeidan F. Y., Murphy B. G. Machinery vibration and rotordynamics. – John Wiley & Sons, 2010. – 416 p.
- 28 Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. – Л.: Машиностроение, 1977. – 288 с.
- 29 Harris T. A., Kotzalas M. N. Rolling Bearing Analysis-2 Volume Set. – Crc Press, 2006. – 763 p.
- 30 Kydyrbekuly A., Khajiyeva, L., Gulama-Garyp, A. Y., Kaplunov, J. Nonlinear Vibrations of a Rotor-Fluid-Foundation System Supported by Rolling Bearings // *Strojniski Vestnik/Journal of Mechanical Engineering.* – 2016. – Vol. 62, №. 6. – P. 351-362.

- 31 Fleming D. P., Poplawski J. V. Transient vibration prediction for rotors on ball bearings using load-dependent nonlinear bearing stiffness //International Journal of Rotating Machinery. – 2004. – Vol. 10, №. 6. – P. 489-494.
- 32 Lee D. S., Choi D. H. A dynamic analysis of a flexible rotor in ball bearings with nonlinear stiffness characteristics //International Journal of Rotating Machinery. – 1997. – Vol. 3, №. 2. – P. 73-80.
- 33 Bolotin V. V. Nonconservative problems of the theory of elastic stability. – Macmillan, New York, 1963. – 324 p.
- 34 Derendyayev N.V., Soldatov I.N., Vostrukhov A.V. Stability and Andronov-Hopf bifurcation of steady-state motion of rotor system partly filled with liquid: continuous and discrete models // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 73, № 4. – P. 580-589.
- 35 Hendricks S.L. Stability of a clamped-free rotor partially filled with liquid // Trans. ASME. Journal Applied Mechanic. – 1986. – Vol.33, №1. – P. 166-172.
- 36 Rahimov E.R., Rahmatullaev A.Sh., Kydyrbekuly A.B. Dynamics of unbalanced rotor in the interaction with the other physical fields // Trans. Seventh World Congress on the theory of machines and mechanisms. – Sevilla, Spain, 1987.– P. 532-539.
- 37 Berman A.S., Lundgren T.S., Cheng A. Asynchronous whirt in a rotating cylinder partially filled with liquid // Journal of Fluid Mechanics. – 1985. – Vol.150. – P. 321-327.
- 38 Saito S., Someya T. Self-excited vibration of a rotating hollow shaft partially filled with liquid // Trans. ASME. Journal of Mechanical Design. – 1980. – Vol.102, №1. – P. 185-192.
- 39 Hendricks S.L. Instability of a damped rotor partially filled with an inviscid liquid // Trans. ASME. Journal Applied Mechanic. – 1981. – Vol.48, №3. – P. 674-682.
- 40 Manasseh R. Distortions of inertia waves in a rotating fluid cylinder forced near its fundamental mode resonance // Journal of Fluid Mechanics. – 1994. – Vol.265. – P. 345-370.
- 41 Lichtenberg G. Experimentell Untersuchung des Schurngugsverhaltens eines flussig – keitsgefüllten Rotors mit Kreiselwirkung // VDI-Berichte. – 1980. – Vol.381. – P. 161-166.
- 42 Kollmann F.G. Experimentelle und theoretische Untersuchungen uber die kritischen Drehzahlen flussigkeitsgefüllter Hohlkorper // Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. – 1962. – Vol.28, №4. – P. 115-123.
- 43 Urbiola-Soto L., Lopez-Parra M. Liquid self-balancing device effects on flexible rotor stability //Shock and Vibration. – 2013. – Vol. 20, №. 1. – P. 109-121.
- 44 Alshroof, O. N., Forbes, G. L., Sawalhi, N., Randall, R. B., Yeoh, G. H. Computational fluid dynamic analysis of a vibrating turbine blade //International Journal of Rotating Machinery. – 2012. – Vol. 2012. – P. 1-15.

- 45 Zhu C. Stability behaviour of an isotropic rotor system anisotropically mounted and partially filled with inviscous fluid //IMAC-XIX: A Conference on Structural Dynamics, Kissimmee, FL. – 2001. – P. 1278-1283.
- 46 Kydyrbekuly A. Rotor-Liquid-Fundament System's Oscillation //Advances in Mechanisms Design. – Springer, Dordrecht, 2012. – P. 223-229.
- 47 Silin R., Royzman V. The research into the automatic balancing process of rotors with vertical axis of rotation // Tenth World Congress on the theory of machine and mechanisms. – Oulu, Finland, 1999. – Vol.4. – P. 1734-1739.
- 48 Changsheng Z. Experimental investigation into the effect of fluid viscosity on instability of an over-hung flexible rotor partially filled with liquid // Trans. ASME. Journal of Vibrations and Acoustics. – 2006. –128. – P. 1-10.
- 49 Forbes G. L., Randall R. B. Simulation of Gas Turbine blade vibration measurement from unsteady casing wall pressure //Acoustics 2009: Research to Consulting. – 2009.
- 50 Krämer E. Dynamics of rotors and foundations, Springer-Verlag, New York, 1993. – 384 p.
- 51 Gasch R., Maurer J., Sarfeld W. Soil influence on unbalance response and stability of a simple rotor-foundation system //Journal of Sound and Vibration. – 1984. – Vol. 93, №. 4. – P. 549-566.
- 52 Feng N., Hahn E. Vibration analysis of rotor-bearing-pedestal system // Proc. 5th International Congress on Sound and Vibration. – Adelaide, Australia, 1997. – P. 2457-2464.
- 53 Feng N., Hahn E. Experimental identification of the pedestal in a rotor-bearing-pedestal system // Proc. 5th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics. – Darmstadt, Germany, 1998. – P. 734-745.
- 54 Kramer E. Computation of vibrations of the coupled system machine-foundation // Proc. 2th International Conference on Vibrations Rotating Machines. Cambridge. – London, 1980. – P. 333-338.
- 55 Sun L. Active vibration control of rotor-bearing system: dis. for a job. scientific step. PhD 02/01/06. – Melbourn, 1995. – 20 p.
- 56 Bai C., Zhang H., Xu Q. Experimental and numerical studies on nonlinear dynamic behavior of rotor system supported by ball bearings //Journal of engineering for gas turbines and power. – 2010. – Vol. 132, №. 8. – P. 734-745.
- 57 Aktürk N., Uneeb M. and Gohar R. The Effects of Number of Balls and Preload on Vibrations Associated with Ball Bearings // Trans. ASME. Journal of Tribology. – 1997. – 119. – P. 747-753.
- 58 Rezvani M., Hahn E.J. The adequacy of the short bearing approximation for dynamically loaded narrow hydrodynamic bearings // Trans. ASME. Journal of Tribology. – 1993. – Vol.115, № 3. – P. 544-549.
- 59 Guida D., Pappalardo C.M. Sommerfeld and Mass Parameter Identification of Lubricated Journal Bearings // Applied and Theoretical Mechanics. – Vol. 4, № 4. – P. 205-214.
- 60 Isayuk-Sayevskaya A.R., Kelzon A.S. Dynamics of a high-revolution scroll centrifuge // Machine Vibration. 1995. – Vol.3, № 4. – P.233-237.

- 61 Tiwari M., Gupta K., Prakash O. Effect of Radial Internal Clearance of a Ball Bearing on the Dynamics of a Balanced Horizontal Rotor // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Vol. 238, № 5. – P. 723-756.
- 62 Tiwari M., Gupta K., Prakash O. Dynamic Response of an Unbalanced Rotor Supported on Ball Bearings // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – 238 5. – P. 757-779.
- 63 Yamamoto T., Ishida Y., Ikeda T. Vibrations of a Rotating Shaft with Rotating Nonlinear Restoring Forces at the Major Critical Speed. Bull. JSME. – 1984. – Vol. 27, № 230. – P. 1728-1736.
- 64 Forbes G. L., Randall R. B. Resonance phenomena of an elastic ring under a moving load // Journal of sound and vibration. – 2008. – Vol. 318, №. 4. – P. 991-1004.
- 65 Harsha S.P. Rolling Bearing Vibrations – The Effects of Surface Waviness and Radial Internal Clearance // Int. Journal Computational Methods in Engineering Sci. and Mechanics. – 2006. – Vol. 7, №. 2. – P. 91-111.
- 66 Harsha S.P. Nonlinear Dynamic Analysis of a High-Speed Rotor Supported by Rolling Element Bearings // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol. 290, №. 2. – P. 65-100.
- 67 Jang G.H., Jeong S.W. Analysis of a Ball Bearing with Waviness Considering the Centrifugal Force and Gyroscopic Moment of the Ball // Trans. ASME. Journal of Tribology. – 2003. – Vol. 125. – P. 487-498.
- 68 Savin L., Solomin O., Ustinov D. Rotor dynamics on friction bearings with cryogenic lubrication // Tenth World Congress on the theory of machine and mechanisms. – Oulu, Finland, 1999. – Vol.4. – P. 1716-1721.
- 69 Kydyrbekuly A., Ibrayev G., Ospan T., Nikonov A. Multi-parametric Dynamic Analysis of a Rolling Bearings System // Strojnicki Vestnik/Journal of Mechanical Engineering. – 2021. – Vol.67, №.9. – P. 421-432.
- 70 Haddad P. R. The encyclopedia of separation science. – TrAC-Trends in Analytical Chemistry, 2004. – 784 p.
- 71 Ruthven, D.M. Encyclopedia of separation technology. – Wiley, 1997. – 581 p.
- 72 Соколов В. И. Центрифугирование. – Химия, 1976. – 581 с.
- 73 Grimwood C., Centrifugation. Handbook of Sugar Refining. – Wiley, New York, – 2000. – 244 p.
- 74 Лукьяненко В.М., Таранец А.В. Промышленные центрифуги, – М: Химия, 1974. – 376 с.
- 75 Grimwood G. C., Thewlis M. J., Dean A. J. Efficient centrifugal operation // International sugar journal. – 2005. – Vol.1284. – P. 681-692.
- 76 Swindells, R. J. A mathematical model of a continuous sugar centrifuge. – Wiley, New York, 1982. – 144 p.
- 77 Spelter, L. E., Nirschl, H., Stickland, A. D., Scales, P. J. Pseudo two-dimensional modeling of sediment build-up in centrifuges: A compartment approach using compressional rheology // AIChE Journal. – 2013. – Vol. 59, № 10. – P. 3843-3855.

- 78 Bell G. R. A., Symons D. D., Pearse J. R. Mathematical model for solids transport power in a decanter centrifuge //Chemical Engineering Science. – 2014. – Vol. 107. – P. 114-122.
- 79 Bizard, A. F. M., Symons, D. D., Fleck, N. A., Grimwood, G. C. Design guidelines for granular particles in a conical centrifugal filter //Chemical Engineering Research and Design. – 2013. – Vol. 91, № 2. – P. 348-360.
- 80 Semenov E. V., Slavyanskii A. A. Calculation of Emulsion Separation Process in a Batch-Operated Centrifuge //Chemical and Petroleum Engineering. – 2020. – Vol. 55, № 9. – P. 785-793.
- 81 Bullen J., Bruijn J. M. Impact of the centrifugal speed of rotation on the quality of white sugar crystals //Zuckerindustrie. – 2004. – Vol. 129, № 10. – P. 738-741.
- 82 Jullienne L. Washing sugar in batch A-centrifugals //Proceedings of The South African Sugar Technologists' Association-June. – 1983. – P. 43.
- 83 Please, C.P., Fowkes, N.D., Mason, D.P., Khalique, C.M., Hutchinson, A., Rademeyer, M.C., Loubser R., Davis. S. Extraction of molasses from sugar crystals in a centrifuge //Mathematical Modelling and Analysis. – 2014. – Vol. 19, № 3. – P. 347-358.
- 84 Ligier K. Methods of diagnosing an acww 1000 sugar centrifuge with the use of vibration processes //Technical sciences. – 2008. – Vol. 11. – P. 289-300.
- 85 Zachwieja J., Ligier K. Numerical analysis of vertical rotor dynamics of ACWW 1000 centrifuge //Journal of theoretical and applied mechanics. – 2005. – Vol. 43. – P. 257-275.
- 86 Kydyrbekuly A.B., Khajieva, L.A., Ybraev, G.E. Researching of the Method of Separation of Fine-Grain Particles by Centrifugation in a Liquid Medium // Proc.12th International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms, ADVANCES IN MECHANISM DESIGN II, Mechanisms and Machine Science. – Springer, Cham, 2017. – Vol.44. – P. 105-116.
- 87 Kydyrbekuly A. B., Ibrayev G. E. Modeling the Separation Process in Vertical Rotor Systems // Proc.13th International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms. ADVANCES IN MECHANISM DESIGN III, Mechanisms and Machine Science. – Springer, Cham, 2022. – Vol.45. – P. 104-113.
- 88 Проектирование и исследование динамики роторных машин для разделения многофазных жидких сред с учетом нелинейности опор и действия высокочастотного электромагнитного поля: заявка по НИР / НАО «КазНУ им.аль-Фараби»: рук. Мутанов Г.М.; исполн.: Кыдырбекулы А.Б. – Алматы, 2020. – 25 с. – № 0120РК00608. – ИРН АР08856167.
- 89 Пат. №6542 Республика Казахстан. Подвесная центрифуга непрерывного действия с высокочастотным электромагнитным полем / Кыдырбекулы А.Б., Рахметолла А.Ш., Ибраев Г.Е.; опубл. 06.05.21, Бюл. № 41.
- 90 Kydyrbekuly A.B., Rahmetolla A.Sh., Ybraev G.E., Rakhimzhanova A.Zh. About the separation of finely divided particles during centrifugation in

liquid media //Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2018. – Т. 98, № 2. – С. 33-44.

91 Рахимжанова А.Ж., Ибраев А.Е. Исследование собственных колебаний неуравновешенной опорной центрифуги с полостью, частично заполненной жидкостью и установленной на упругоподвижном фундаменте // ВЕСТНИК КазНУ. – 2019. – Т. 133, № 3. – С. 283-290.

92 Kydyrbekuly A. B., Ibrayev G. G. A. Об автоколебаниях в вертикальных роторных системах, установленных на упругих опорах //Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2020. – Т. 105, № 1. – С. 160-173.

93 Kydyrbekuly A. B., Ibrayev G. E. Resonant Fluctuations of Nonlinear System with Nonlinear-Viscous Resistance // Proceedings of International Conference on «Modern Achievements of Science and Education», – Paris, France, 2013. – P. 3.

94 Kydyrbekuly A. B., Khajiyeva L.A., Ibrayev G. E. Rotor-Liquid-Fundament System's Dynamics // Proceedings of 1st International Conference on Mathematical Methods & Computational Techniques in Science & Engineering , – Athens, Greece, 2014. – P. 47.

95 Ибраев Г.Е., Рахимжанова А.Ж., Тургунбоев Д.А, Вынужденные нелинейные колебания системы «ротор-фундамент» на подшипниках качения // Материалы междунар. научно-практической конференции «Приоритетные задачи и стратегия технических наук» – Тольятти, Россия, 2017. – С. 25-31.

96 Кыдырбекулы А.Б., Ибраев Г.Е., Рахимжанова А.Ж., Лемисова А.Н., Динамика разделения гетерогенных систем при центрифугировании // Материалы междунар. научно-практической конференции «Актуальные проблемы информатики, механики и робототехники. Цифровые технологии в машиностроении». – Алматы, Казахстан, 2018. – С. 102-103.

97 Jin, Y., Lu, Z., Yang, R., Hou, L., Chen, Y. A new nonlinear force model to replace the Hertzian contact model in a rigid-rotor ball bearing system //Applied Mathematics and Mechanics. – 2018. – Vol. 39, № 3. – P. 365-378.

98 Doob, J. L., Grothendieck, A., Heinz, E. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. – Springer Berlin Heidelberg, 1971. – 360 p.

99 Stoker J.J. Nonlinear Vibrations. –Inter-science: New York, 1950. – 360 p.

100 Hayashi C. Nonlinear oscillations in physical systems. – Princeton University Press, 2014. – 432 p.

101 Nayfeh, A.H., Mook, D. Nonlinear Oscillations. – Wiley: New York, 1979. – 720 p.

102 Benaroya H., Nagurka M., Han S. Mechanical vibration: analysis, uncertainties, and control. – CRC Press, 2017. – 511 p.

103 Weaver Jr W., Timoshenko S. P., Young D. H. Vibration problems in engineering. – John Wiley & Sons, 1990. – 624 p.

104 Klotter K. Nonlinear Vibration Problems Treated by The Averaging Method Of Ritz // Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME. – 1951. – Vol. 105, № 3. – P. 160-173.

105 Magnus K., Popp K., Sextro W. Schwingungen. – Stuttgart: Teubner, 1976. – 298 p.



# ҚОСЫМША А

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ**      **РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН**

**REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**

**ПАТЕНТ**  
**PATENT**

№ 6542

**ПАЙДАЛЫ МОДЕЛЬГЕ / НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ / FOR UTILITY MODEL**



(21) 2021/0438.2

(22) 06.05.2021

(45) 06.05.2022

(54) Жоғары жиілікті электромагниттік өрісі бар үздіксіз үдерісті аспалы центрифуга  
Подвесная центрифуга непрерывного действия с высокочастотным электромагнитным полем  
Suspended continuous centrifuge with high frequency electromagnetic field

(73) Кыдырбекулы Алматыбек Балгабекович (KZ)      Kudyrbekuly Almatbek Balgabekovich (KZ)

(72) Рахметолла Абдижалел Шайманұлы (KZ)      Rakhmetolla Abdizhalel Shaimanuly (KZ)  
Ибраев Гулама-Гарип Алишер Ерикжанович (KZ)      Ibraev Gulama-Garip Alisher Erikzhanovich (KZ)



ЭЦҚ кол қойылды  
Подписано ЭЦП  
Signed with EDS

Е. Оспанов  
Е. Оспанов  
Y. Ospanov



«Ұлттық зияткерлік меншік институты» РМҚ директоры  
Директор РГП «Национальный институт интеллектуальной собственности»  
Director of the «National Institute of Intellectual Property» RSE

## ҚОСЫМША Б

```

restart;
with(plots);
with(plottools);
with(DEtools);
CUDA:-Enable(true);
CUDA:-IsEnabled();
Ran1 := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
Ran2 := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
Ran3 := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
Fan1 := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
Fan2 := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
Fan3 := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
Rnum := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
Fnum := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
m := 2.4; M := 250; e := 0.1e-2; c0 := 1.1*10^7; c1 := .87*10^11; c2 := 3.26*10^5; k
:= 42; k0 := 6.59; R := 0.7e-1; h := 0.6e-1; ro := 1000; r := .33*R;
sigm := Om-w;
mLf := ro*Pi*R^2*h;
gama := ((R/r)^2+1)/((R/r)^2-1);
w := sqrt((c2*m-c0*(m-M)+sqrt((c0*(m-M)-c2*m)^2-4*c0*(c2-
c0)*m*M))/(2*m*M));
mu := m/M; `&mu;L` := mLf/m;
n0 := sqrt(2*c0/m); n2 := sqrt(2*c2/M);
tau := Om/n0;
s := w/n0;
n02 := n2/n0; K0 := k0/(2*M);
K := k/(2*m); K01 := K0*K/n0^2; K00 := K0/n0; K10 := K/n0; c10 := c1/c0; n10 :=
2*c1/M; n01 := sqrt(2*c0/M);
m0 := (n2^2-w^2)^2+4*K0^2*w^2;
m1 := (-Om^2+n2^2)^2+4*K0^2*Om^2;
D3 := sigm^2-2*sigm*w-w^2;
D4 := gama*sigm^2-2*sigm*w-w^2;
P0 := mu*e*w^2*(n2^2-w^2)/m0;
P1 := -2*K0*w^2/m0;
P2 := (mu*(1+`&mu;L`)*w^2*(n2^2-w^2)-4*K*K0*w^2)/m0;
P3 := -2*mu*((1+`&mu;L`)*w^2*K0+(n2^2-w^2)*K)*w/m0;
P4 := (mu*Om^2*(-Om^2+n2^2)*(1+`&mu;L`*D3/D4)-4*K*K0*Om^2)/m1;
P5 := -2*mu*((1+`&mu;L`*D3/D4)*K0*Om^2+(-Om^2+n2^2)*K)*Om/m0;
P01 := P0+I*P1;
P23 := 1-P2-I*P3;
P45 := P4+I*P5;

```



```

P7 := 1-P4;
P75 := P7-I*P5;
P233 := P2+I*P3;
e0 := n2^2-w^2+(2*I)*K0*w;
e2 := n2^2-Om^2+(2*K0*I)*Om;
for i to 5000 do
Om := i;
eq1 := (3*n10*P75*P23*(1/2))*(A^2*P23-2*A*P01)-e2*P45+(n01^2+(3*n10*(1/2)
))*P01^2)*P75+(3*n10*(1/4))*P75^3*B^2 = 0;
eq2 := (3/4)*n10*P23^3*A^3-(9/4)*n10*P01*P23^2*A^2+(P23*(n01^2+(9/4)*
*n01*P01^2)-e0*P233)*A-(e0+n01^2+(3/4)*n10*P01^2)*P01+(3/2)*P75^2*n10*
*(A*P23-P01)*B^2 = 0;
rez := solve({eq1, eq2}, {A, B});
Ran1 := sqrt(Re(rez[1][1])^2+Im(rez[1][1])^2);
Fan1 := sqrt(Re(rez[1][2])^2+Im(rez[1][2])^2);
Ran2 := sqrt(Re(rez[2][1])^2+Im(rez[2][1])^2);
Fan2 := sqrt(Re(rez[2][2])^2+Im(rez[2][2])^2);
Ran3 := sqrt(Re(rez[3][1])^2+Im(rez[3][1])^2);
Fan3 := sqrt(Re(rez[3][2])^2+Im(rez[3][2])^2);
AL1[i] := abs(rhs(rez[1][1]));
BL1[i] := abs(rhs(rez[1][2]));
FLx := AL1[i]*mLf*Om^2*cos(Om*t)+BL1[i]*mLf*w^2*(sigm^2-2*sigm*w-
w^2)*cos(w*t)/(gama*sigm^2-2*sigm*w-w^2);
FLy := AL1[i]*mLf*Om^2*sin(Om*t)+BL1[i]*mLf*w^2*(sigm^2-2*sigm*w-
w^2)*sin(w*t)/(gama*sigm^2-2*sigm*w-w^2);
ur := m*(diff(x1(t), t, t))+k*(diff(x1(t), t))+c0*(x1(t)-x2(t))+c1*(x1(t)-x2(t))^3 =
m*e*Om^2*cos(Om*t)+FLx, m*(diff(y1(t), t, t))+k*(diff(y1(t), t))+c0*(y1(t)-
y2(t))+c1*(y1(t)-y2(t))^3 = m*e*Om^2*sin(Om*t)+FLy,
M*(diff(x2(t), t, t))+k0*(diff(x2(t), t))-c0*(x1(t)-x2(t))-c1*(x1(t)-x2(t))^3+c2*x2(t) =
0, M*(diff(y2(t), t, t))+k0*(diff(y2(t), t))-c0*(y1(t)-y2(t))-c1*(y1(t)-
y2(t))^3+c2*y2(t) = 0; ic := x1(0) = e, (D(x1))(0) = 0, x2(0) = .1*e, (D(x2))(0) = 0,
y1(0) = 0, (D(y1))(0) = 0, y2(0) = 0, (D(y2))(0) = 0;
res := dsolve({ic, ur}, numeric, maxfun = 100000);
Rnum[i] := sqrt(res(i)[2]^2+res(i)[6]^2);
Fnum[i] := sqrt(res(i)[4]^2+res(i)[8]^2) end do;
Export(Ran1, "NFRS.xls", "R", "B1:B5000");
Export(Ran2, "NFRS.xls", "R", "C1:C5000");
Export(Fan1, "NFRS.xls", "F", "B1:B5000");
Export(Fan2, "NFRS.xls", "F", "C1:C5000");
Export(Rnum, "NFRS.xls", "Rnum", "B1:B5000");
Export(Fnum, "NFRS.xls", "Fnum", "C1:C5000");

```

## ҚОСЫМША В

```

restart;
with(plots);
with(plottools);
with(DEtools);
with(ExcelTools);
CUDA:-Enable(true);
CUDA:-IsEnabled();
T := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
numXr := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
numYr := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
numXf := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
numYf := Array(1 .. 5000, 1 .. 1);
m := 2.4; M := 25; e := 0.1e-2; c0 := 1.1*10^7; c1 := .87*10^11; c2 := 3.26*10^5; kk
:= 42; k0 := 6.59;
ur := m*(diff(x1(t), t, t))+kk*(diff(x1(t), t))+c0*(x1(t)-x2(t))+c1*(x1(t)-x2(t))^3 =
m*e*w^2*cos(w*t), m*(diff(y1(t), t, t))+kk*(diff(y1(t), t))+c0*(y1(t)-
y2(t))+c1*(y1(t)-y2(t))^3 = m*e*w^2*sin(w*t), M*(diff(x2(t), t, t))+k0*(diff(x2(t),
t))-c0*(x1(t)-x2(t))-c1*(x1(t)-x2(t))^3+c2*x2(t) = 0, M*(diff(y2(t), t,
t))+k0*(diff(y2(t), t))-c0*(y1(t)-y2(t))-c1*(y1(t)-y2(t))^3+c2*y2(t) = 0;
ic := x1(0) = e, (D(x1))(0) = 0, x2(0) = .1*e, (D(x2))(0) = 0, y1(0) = 0, (D(y1))(0) = 0,
y2(0) = 0, (D(y2))(0) = 0;
miu := m/M;
w1 := (c0/m)^.5;
w2 := (c2/m)^.5;
lamda := w2^2/w1^2;
eps := c1*e^2/(m*w1^2);
etta := w/w1;
Dz1 := kk/(2*w1*m);
Dz2 := k0/(2*w1*m);
delta := 10^(-6);
k := (1+miu)*eps*((a1-a2)^2-3*(b1-b2)^2)/(2*w^2);
H1 := 1-(3/8)*k-(5/32)*k^2;
H2 := 1-(1/8)*k+(1/16)*k^2;
eq := a1-a2+(1/2)*w^2*k*a1-w^2*a1+(3/4)*eps*(a1-a2)*((a1-a2)^2+(b1-
b2)^2)+2*Dz1*w*b1*H2 = w^2, b1-b2+(1/2)*w^2*k*b1-w^2*b1+(3/4)*eps*(b1-
b2)*((a1-a2)^2+(b1-b2)^2)-2*Dz1*w*a1*H1 = 0, miu*((lamda+1)*a2-
a1)+(1/2)*w^2*k*a2-w^2*a2+(3/4)*miu*eps*(a1-a2)*((a1-a2)^2+(b1-
b2)^2)+2*miu*Dz2*w*b2*H2 = 0, miu*((lamda+1)*b2-b1)+(1/2)*w^2*k*b2-
w^2*b2+(3/4)*miu*eps*(b1-b2)*((a1-a2)^2+(b1-b2)^2)-2*miu*Dz2*w*a2*H1 =
0;

```

```

for i to 5000 do
w := i;
res := dsolve({ic, ur}, numeric, maxfun = 0);
T[i] := w;
numXr := rhs(res(25)[2]);
numYr := rhs(res(25)[6]);
numXf := rhs(res(25)[4]);
numYf := rhs(res(25)[8]);
rez := fsolve({eq}, {a1 = numXr .. 2, a2 = numXf .. 2, b1 = numYr .. 2, b2 = numYf ..
2}) end do;
Export(T, "Dif_Num_Sol.xls", "R25", "A1:A5000");
Export(numXr, "Dif_Num_Sol.xls", "R25", "B1:B5000"); Export(numYr,
"Dif_Num_Sol.xls", "R25", "C1:C5000"); Export(numT, "Dif_Num_Sol.xls", "F25",
"A1:A5000"); Export(numXf, "Dif_Num_Sol.xls", "F25", "B1:B5000");
Export(numYf, "Dif_Num_Sol.xls", "F25", "C1:C5000");

```

## ҚОСЫМША Г

```
restart;
with(plots);
with(plottools);
with(DEtools);
with(ExcelTools);
CUDA:-Enable(true);
CUDA:-IsEnabled();
T := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr1 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr1 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr2 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr2 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr3 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr3 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr4 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr4 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr5 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr5 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr6 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr6 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr7 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr7 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr8 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr8 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xr9 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yr9 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xf1 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf1 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xf2 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf2 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xf3 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf3 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xf4 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf4 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xf5 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf5 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xf6 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf6 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xf7 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf7 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
```

```

Xf8 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf8 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Xf9 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
Yf9 := Array(1 .. 200, 1 .. 1);
m := 2.4; M := 25; e := 0.1e-2; c0 := 1.1*10^7; c1 := .87*10^11; c2 := 3.26*10^5;
n0 := (c0/m)^.5; n1 := c1/m; n2 := (c2/M)^.5; miu := m/M; n01 := n0*sqrt(miu);
n10 := miu*n1;
ur := n0^2*(a1-a2)-w^2*a1+n1*((3/4)*(a1-a2)^3+(3/4)*(a1-a2)^2*(b1-
b2)+(3/2*(a1-a2))*(b1-b2)^2) = e*w^2, n0^2*(b1-b2)-9*w^2*b1+n1*((1/4)*(a1-
a2)^3+(3/4)*(b1-b2)^3+(3/2)*(a1-a2)^2*(b1-b2)) = 0, (n2^2-w^2)*a2-
miu*n0^2*(a1-a2)-miu*n1*((3/4)*(a1-a2)^3+(3/4)*(a1-a2)^2*(b1-b2)+(3/2*(a1-
a2))*(b1-b2)^2) = 0, (n2^2-9*w^2)*b2-miu*n0^2*(b1-b2)-miu*n1*((1/4)*(a1-
a2)^3+(3/4)*(b1-b2)^3+(3/2)*(a1-a2)^2*(b1-b2)) = 0;
for i to 200 do
w := 25*i;
res := solve({ur}, {a1, a2, b1, b2});
A11[i]:=sqrt(Re(rhs(res[1][1]))^2+Im(rhs(res[1][1]))^2);
A21[i]:=sqrt(Re(rhs(res[1][2]))^2+Im(rhs(res[1][2]))^2);
B11[i]:=sqrt(Re(rhs(res[1][3]))^2+Im(rhs(res[1][3]))^2);
B21[i]:=sqrt(Re(rhs(res[1][4]))^2+Im(rhs(res[1][4]))^2);
A12[i]:=sqrt(Re(rhs(res[2][1]))^2+Im(rhs(res[2][1]))^2);
A22[i]:=sqrt(Re(rhs(res[2][2]))^2+Im(rhs(res[2][2]))^2);
B12[i]:=sqrt(Re(rhs(res[2][3]))^2+Im(rhs(res[2][3]))^2);
B22[i] := sqrt(Re(rhs(res[2][4]))^2+Im(rhs(res[2][4]))^2);
A13[i] := sqrt(Re(rhs(res[3][1]))^2+Im(rhs(res[3][1]))^2);
A23[i] := sqrt(Re(rhs(res[3][2]))^2+Im(rhs(res[3][2]))^2);
B13[i] := sqrt(Re(rhs(res[3][3]))^2+Im(rhs(res[3][3]))^2);
B23[i] := sqrt(Re(rhs(res[3][4]))^2+Im(rhs(res[3][4]))^2);
A14[i] := sqrt(Re(rhs(res[4][1]))^2+Im(rhs(res[4][1]))^2);
A24[i] := sqrt(Re(rhs(res[4][2]))^2+Im(rhs(res[4][2]))^2);
B14[i] := sqrt(Re(rhs(res[4][3]))^2+Im(rhs(res[4][3]))^2);
B24[i] := sqrt(Re(rhs(res[4][4]))^2+Im(rhs(res[4][4]))^2);
A15[i] := sqrt(Re(rhs(res[5][1]))^2+Im(rhs(res[5][1]))^2);
A25[i] := sqrt(Re(rhs(res[5][2]))^2+Im(rhs(res[5][2]))^2);
B15[i] := sqrt(Re(rhs(res[5][3]))^2+Im(rhs(res[5][3]))^2);
B25[i] := sqrt(Re(rhs(res[5][4]))^2+Im(rhs(res[5][4]))^2);
A16[i] := sqrt(Re(rhs(res[6][1]))^2+Im(rhs(res[6][1]))^2);
A26[i] := sqrt(Re(rhs(res[6][2]))^2+Im(rhs(res[6][2]))^2);
B16[i] := sqrt(Re(rhs(res[6][3]))^2+Im(rhs(res[6][3]))^2);
B26[i] := sqrt(Re(rhs(res[6][4]))^2+Im(rhs(res[6][4]))^2);
A17[i] := sqrt(Re(rhs(res[7][1]))^2+Im(rhs(res[7][1]))^2);
A27[i] := sqrt(Re(rhs(res[7][2]))^2+Im(rhs(res[7][2]))^2);

```

```

B17[i] := sqrt(Re(rhs(res[7][3]))^2+Im(rhs(res[7][3]))^2);
B27[i] := sqrt(Re(rhs(res[7][4]))^2+Im(rhs(res[7][4]))^2);
A18[i] := sqrt(Re(rhs(res[8][1]))^2+Im(rhs(res[8][1]))^2);
A28[i] := sqrt(Re(rhs(res[8][2]))^2+Im(rhs(res[8][2]))^2);
B18[i] := sqrt(Re(rhs(res[8][3]))^2+Im(rhs(res[8][3]))^2);
B28[i] := sqrt(Re(rhs(res[8][4]))^2+Im(rhs(res[8][4]))^2);
A19[i] := sqrt(Re(rhs(res[9][1]))^2+Im(rhs(res[9][1]))^2);
A29[i] := sqrt(Re(rhs(res[9][2]))^2+Im(rhs(res[9][2]))^2);
B19[i] := sqrt(Re(rhs(res[9][3]))^2+Im(rhs(res[9][3]))^2);
B29[i] := sqrt(Re(rhs(res[9][4]))^2+Im(rhs(res[9][4]))^2);
T[i] := w;
Xr1[i] := evalf(A11[i]*cos(100*w)+B11[i]*cos(300*w));
Yr1[i] := evalf(A11[i]*sin(100*w)+B11[i]*sin(300*w));
Xr2[i] := evalf(A12[i]*cos(100*w)+B12[i]*cos(300*w));
Yr2[i] := evalf(A12[i]*sin(100*w)+B12[i]*sin(300*w));
Xr3[i] := evalf(A13[i]*cos(100*w)+B13[i]*cos(300*w));
Yr3[i] := evalf(A13[i]*sin(100*w)+B13[i]*sin(300*w));
Xr4[i] := evalf(A14[i]*cos(100*w)+B14[i]*cos(300*w));
Yr4[i] := evalf(A14[i]*sin(100*w)+B14[i]*sin(300*w));
Xr5[i] := evalf(A15[i]*cos(100*w)+B15[i]*cos(300*w));
Yr5[i] := evalf(A15[i]*sin(100*w)+B15[i]*sin(300*w));
Xr6[i] := evalf(A16[i]*cos(100*w)+B16[i]*cos(300*w));
Yr6[i] := evalf(A16[i]*sin(100*w)+B16[i]*sin(300*w));
Xr7[i] := evalf(A17[i]*cos(100*w)+B17[i]*cos(300*w));
Yr7[i] := evalf(A17[i]*sin(100*w)+B17[i]*sin(300*w));
Xr8[i] := evalf(A18[i]*cos(100*w)+B18[i]*cos(300*w));
Yr8[i] := evalf(A18[i]*sin(100*w)+B18[i]*sin(300*w));
Xr9[i] := evalf(A19[i]*cos(100*w)+B19[i]*cos(300*w));
Yr9[i] := evalf(A19[i]*sin(100*w)+B19[i]*sin(300*w));
Xf1[i] := evalf(A21[i]*cos(100*w)+B21[i]*cos(300*w));
Yf1[i] := evalf(A21[i]*sin(100*w)+B21[i]*sin(300*w));
Xf2[i] := evalf(A22[i]*cos(100*w)+B22[i]*cos(300*w));
Yf2[i] := evalf(A22[i]*sin(100*w)+B22[i]*sin(300*w));
Xf3[i] := evalf(A23[i]*cos(100*w)+B23[i]*cos(300*w));
Yf3[i] := evalf(A23[i]*sin(100*w)+B23[i]*sin(300*w));
Xf4[i] := evalf(A24[i]*cos(100*w)+B24[i]*cos(300*w));
Yf4[i] := evalf(A24[i]*sin(100*w)+B24[i]*sin(300*w));
Xf5[i] := evalf(A25[i]*cos(100*w)+B25[i]*cos(300*w));
Yf5[i] := evalf(A25[i]*sin(100*w)+B25[i]*sin(300*w));
Xf6[i] := evalf(A26[i]*cos(100*w)+B26[i]*cos(300*w));
Yf6[i] := evalf(A26[i]*sin(100*w)+B26[i]*sin(300*w));
Xf7[i] := evalf(A27[i]*cos(100*w)+B27[i]*cos(300*w));

```



```

Yf7[i] := evalf(A27[i]*sin(100*w)+B27[i]*sin(300*w));
Xf8[i] := evalf(A28[i]*cos(100*w)+B28[i]*cos(300*w));
Yf8[i] := evalf(A28[i]*sin(100*w)+B28[i]*sin(300*w));
Xf9[i] := evalf(A29[i]*cos(100*w)+B29[i]*cos(300*w));
Yf9[i] := evalf(A29[i]*sin(100*w)+B29[i]*sin(300*w)) end do;
Export(T, "Polinom.xls", "R1", "A1:A200");
Export(Xr1, "Polinom.xls", "R1", "B1:B200");
Export(Yr1, "Polinom.xls", "R1", "C1:C200");
Export(Xr2, "Polinom.xls", "R1", "D1:D200");
Export(Yr2, "Polinom.xls", "R1", "E1:E200");
Export(Xr3, "Polinom.xls", "R1", "F1:F200");
Export(Yr3, "Polinom.xls", "R1", "F1:G200");
Export(Xr4, "Polinom.xls", "R1", "H1:H200");
Export(Yr4, "Polinom.xls", "R1", "I1:I200");
Export(Xr5, "Polinom.xls", "R1", "J1:J200");
Export(Yr5, "Polinom.xls", "R1", "K1:K200");
Export(Xr6, "Polinom.xls", "R1", "L1:L200");
Export(Yr6, "Polinom.xls", "R1", "M1:M200");
Export(Xr7, "Polinom.xls", "R1", "N1:N200");
Export(Yr7, "Polinom.xls", "R1", "O1:O200");
Export(Xr8, "Polinom.xls", "R1", "P1:P200");
Export(Yr8, "Polinom.xls", "R1", "Q1:Q200");
Export(Xr9, "Polinom.xls", "R1", "R1:R200");
Export(Yr9, "Polinom.xls", "R1", "S1:S200");
Export(T, "Polinom.xls", "F1", "A1:A200");
Export(Xf1, "Polinom.xls", "F1", "B1:B200");
Export(Yf1, "Polinom.xls", "F1", "C1:C200");
Export(Xf2, "Polinom.xls", "F1", "D1:D200");
Export(Yf2, "Polinom.xls", "F1", "E1:E200");
Export(Xf3, "Polinom.xls", "F1", "F1:F200");
Export(Yf3, "Polinom.xls", "F1", "G1:G200");
Export(Xf4, "Polinom.xls", "F1", "H1:H200");
Export(Yf4, "Polinom.xls", "F1", "I1:I200");
Export(Xf5, "Polinom.xls", "F1", "J1:J200");
Export(Yf5, "Polinom.xls", "F1", "K1:K200");
Export(Xf6, "Polinom.xls", "F1", "L1:L200");
Export(Yf6, "Polinom.xls", "F1", "M1:M200");
Export(Xf7, "Polinom.xls", "F1", "N1:N200");
Export(Yf7, "Polinom.xls", "F1", "O1:O200");
Export(Xf8, "Polinom.xls", "F1", "P1:P200");
Export(Yf8, "Polinom.xls", "F1", "Q1:Q200");
Export(Xf9, "Polinom.xls", "F1", "R1:R200");

```